AMA1D01C　Lecture Notes Set #02

開方術

Finding Roots

By

李向榮博士　梁信謙博士
香港理工大學應用數學系

- 在西方數學史上，很多數學家都極盡努力地嘗試尋找計算平方根的方法。後來到了１８１９年，英國數學家 William Horner才給出了一個被西方人命名為Horner’s method的方法求解一元高次多項式的根 。（意大利數學家Paolo Ruffini於1804年也提出了類似的算法。）
- 其實，在中國古代的典籍裏，早在漢朝時（２０６BC－２２１AD），已經有了開方法。並且，這個方法也被推廣至開立方及應用於數值求解一元高次方程。

《孫子算經》　卷中　第十九問

（現在的傳本分上、中、下三卷，
是唐朝時期的數學教科書之一，作者及編寫年代皆不詳）

- 今有積二十三萬四千五百六十七步。問為方幾何？
- 答曰：四百八十四步九百六十八分步之三百一十一。

Only an approximation

should be an irrational number

$$\sqrt{234567} \approx 484\frac{311}{968}$$

For reference

$$234567 = (484)^2 + 311$$

- Note that the square root of a positive integer is either an integer or an irrational number.
- 若正整數是平方數，則其平方根是整數。若正整數不是平方數，則其平方根是無理數。(正整數的平方根不會是個非整數的有理數)。

$$\sqrt{234567}$$ 是無理數

- 術曰：置積二十三萬四千五百六十七步，為實。次借一算，為下法。步之，超一位，至百而止。商置四百於實之上。副置四萬於實之下，下法之上，名為方法。命上商四百，除實。除訖，倍方法，一退，下法再退。復置上商八十，以次前商。副置八百於方法之下，下法之上，名為廉法。方、廉各命上商八十，以除。訖，倍廉法，上從方法。方法一退，下法再退。復置上商四，以次前。副置四於方法之下，下法之上，名曰隅法。方、廉、隅各命上商四，以除實。 除訖，倍隅法，從方法。上商得四百八十四，下法得九百六十八，不盡三百一十一。是為方四百八十四步九百六十八分步之三百一十一。

開平方　$\sqrt{\quad\quad}$

《九章算術》　少廣

- 開方術曰：置積為實。借一算步之，超一等。議所得，以一乘所借一算為法，而以除。除已，倍法為定法。其復除。折法而下。復置借算步之如初，以復議一乘之，所得副，以加定法，以除。以所得副從定法。復除折下如前。

- 若開之不盡者為不可開，當以面命之。若實有分者，通分內子為定實。乃開之，訖，開其母報除。若母不可開者，又以母乘定實，乃開之，訖，令如母而一。

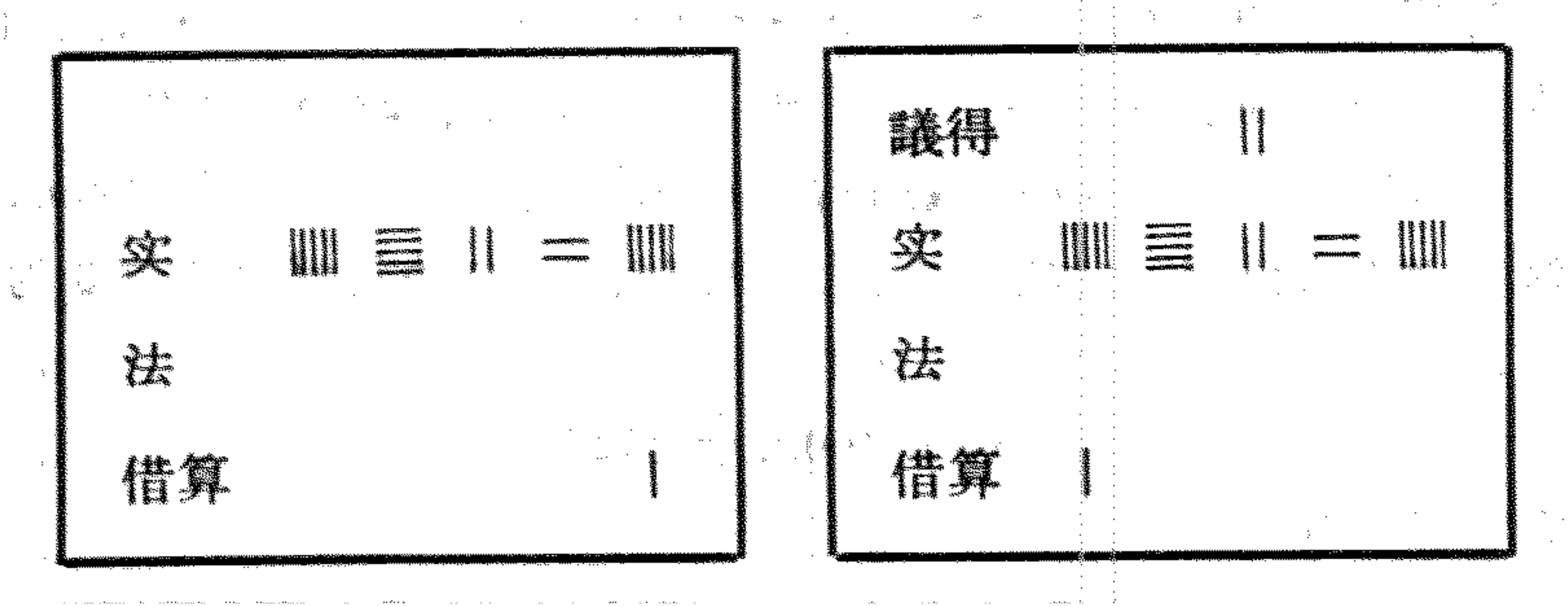
- 今有積五萬五千二百二十五步。問為方幾何？ 答曰：二百三十五步。
- 又有積二萬五千二百八十一步。問為方幾何？答曰：一百五十九步。
- 又有積七萬一千八百二十四步。問為方幾何？答曰：二百六十八步。
- 又有積五十六萬四千七百五十二步、四分步之一。問為方幾何？答曰：七百五十一步半。
- 又有積三十九億七千二百一十五萬六百二十五步。問為方幾何？答曰：六萬三千二十五步。

- Wang Ling & Joseph Needham, “Horner’s Method in Chinese Mathematics; Its Origins in the Root-Extraction Procedures of the Han Dynasty”, T’oung Pao, vol.43, pp. 345-401, 1955.(Square-root of 55225 and cube-root of 1860867).

- 現在普遍認為，中國古代開方術是源於幾何方法。
- 劉徽(1261) 《九章注》內的開方術注，亦附上了圖形解釋，即運用幾何方法解釋其數學原理。可惜現在已經找不到最先前完整的版本。後期較完整的（附上圖解的）版本是在戴震(1724-1777)所輯錄的《永樂大典》內。
- Lam Lay Yong, “The Geometrical Basis of the Ancient Chinese Square-root Method”, Isis, Vol.61, No.1,pp. 92-102, 1970.
- 郭書春（《古代世界數學泰斗劉徽》，山東科技出版社，1992 ）認為劉徽並不單只給予了幾何解釋，當中還加以改良。

古時的計算，是利用算籌。

$$x^2 = 55225.$$



這篇講義並不打算使用算籌，而是採用較為方便的阿拉伯數字作闡述。

《孫子算經》卷中： 置積二十三萬四千五百六十七步，為實。次借一算，為下法 。

							商
2	3	4	5	6	7		實
							方法
					1		下法

步之，超一位，至百而止。

			百	十	個		商
2	3	4	5	6	7		實
							方法
					1		下法

- 個：Is it possible that
  $$1\times 1 \leq 234567 < 10\times 10 \ ?$$ ○ ✖
- 十：Is it possible that
  $$1\times 1 \leq 2345 < 10\times 10 \ ?$$ ○ ✖
- 百：Is it possible that
  $$1\times 1 \leq 23 < 10\times 10 \ ?$$ ○ ←

							商
2	3	4	5	6	7		實
							方法
	1						下法

determine n

			n				商
2	3	4	5	6	7		實
	n						方法
	1						下法

- Find the largest single digit integer n so that $n \times n \le 23$.

  找最大的個位整數 n，而$n \times n$要不大於２３。

- If $n=2$, $n \times n=4$. (less than 23)
- If $n=3$, $n \times n=9$. (less than 23)
- If $n=4$, $n \times n=16$. (less than 23)
- If $n=5$, $n \times n=25$. (over 23 !!!)

Therefore $n=4$.

商置四百於實之上。副置四萬於實之下，下法之上，名為方法。

			4 百				商
2	3	4	5	6	7		實
	4 萬						方法
	1						下法

命上商四百，除實。

4×4=16，23-16=7.

			4				商
2	3	4	5	6	7		實
	4						方法
	1						下法

			4				商
	7	4	5	6	7		實
	4						方法
	1						下法

除訖，倍方法，一退，下法再退。

倍方法:4×2=8.

			4				商
	7	4	5	6	7		實
	4 $\boxed{\times 2=8}$	一退					方法
	1		再退				下法

determine n

			4	n			商
	7	4	5	6	7		實
		8					方法
			n				
			1				下法

- Find the largest single digit integer n so that $(80+n)\times n \leq 745$

  找最大的個位整數 n，而$(80+n)\times n$要不大於745 。
- If n=7, $87\times7=609$ (less than 745)
- If n=8, $88\times8=704$ (less than 745)
- If n=9, $89\times9=801$ (over 745 !!!)

Therefore, n=8.

復置上商八十，以次前商。副置八百於方法之下，下法之上，名為廉法。

			4	8 十			商
	7	4	5	6	7		實
		8					方法
			8 百				廉法
			1				下法

方、廉各命上商八十，以除。

$88\times 8=704$,　$745-704=41$.

			4	8 十			商
	7	4	5	6	7		實
		8					方法
			8 百				廉法
			1				下法

			4	8			商
		4	1	6	7		實
		8					方法
			8				廉法
			1				下法

訖，倍廉法，上從方法。

			4	8			商
		4	1	6	7		實
		8					方法
			8 ×2=16				廉法
			1				下法

80+16=96.

			4	8			商
		4	1	6	7		實
		9	6				方法
							廉法
			1				下法

方法一退，下法再退。

			4	8			商
		4	1	6	7		實
		9	6				方法
							廉法
			1				下法

			4	8			商
		4	1	6	7		實
			9	6			方法
							廉法
					1		下法

determine n

			4	8	n		商
		4	1	6	7		實
			9	6			方法
					n		
					1		下法

- Find the largest single digit integer n so that $(960+n)\times n \leq 4167$
  找最大的個位整數 n，而$(960+n)\times n$要不大於4167 。

- If n=3, $963\times3=2889$ (less than 4167)
- If n=4, $964\times4=3856$ (less than 4167)
- If n=5, $965\times5=4825$ (over 4167 !!!)

Therefore, n=4.

復置上商四，以次前。副置四於方法之下，下法之上，名曰隅法。

			4	8	4		商
		4	1	6	7		實
			9	6			方法
					4		隅法
					1		下法

方、廉、隅各命上商四，以除實 。

964×4=3856，4167-3856=311.

			4	8	4		商
		4	1	6	7		實
			9	6			方法
					4		隅法
					1		下法

			4	8	4		商
			3	1	1		實
			9	6			方法
					4		隅法
					1		下法

除訖，倍隅法，從方法。

$$4 \times 2 = 8.$$

			4	8	4		商
			3	1	1		實
			9	6			方法
					$\boxed{4 \times 2 = 8}$		隅法
					1		下法

$$\sqrt{234567} \approx 484\frac{311}{968}$$

			4	8	4		商
			3	1	1		實
			9	6	8		方法
					1		下法

Actually $234567 = (484)^2 + 311$

另一個例子: 一個完全平方數 (perfect square).

求　844561　的平方根.

8	4	4	5	6	1
					1

8	4	4	5	6	1
					1

8	4	4	5	6	1
	1				

			n		
8	4	4	5	6	1
	n				
	1				

- Find the largest single digit integer n so that $n \times n \leq 84$.

- If $n=7$, $n \times n=49$. (less than 84)
- If $n=8$, $n \times n=64$. (less than 84)
- If $n=9$, $n \times n=81$. (less than 84)

Therefore $n=9$.

$9 \times 9 = 81$, $84 - 81 = 3$.

			9		
8	4	4	5	6	1
	9				
	1				

			9		
	3	4	5	6	1
	9				
	1				

			9		
	3	4	5	6	1
	9 ×2=18				
	1				

			9		
	3	4	5	6	1
	1	8			
			1		

			9	n	
	3	4	5	6	1
	1	8	n		
			1		

- Find the largest single digit integer n so that

  $(180+n)\times n \le 345$.

- If n=1, $181\times 1=181$ (less than 345)
- If n=2, $182\times 2=364$ (over 345 !!!)

Therefore, n=1.

			9	1	
	3	4	5	6	1
	1	8			
			1		
			1		

$181 \times 1 = 181$, $345 - 181 = 164$.

			9	1	
	3	4	5	6	1
	1	8			
			1		
			1		

			9	1	
	1	6	4	6	1
	1	8			
			1 ×2=2		
			1		

			9	1	
	1	6	4	6	1
	1	8	2		
			1		

			9	1	
	1	6	4	6	1
		1	8	2	
					1

			9	1	n
	1	6	4	6	1
		1	8	2	
					n
					1

Find the largest single digit integer n so that

$(1820+n)\times n \leq 16461$.

If n=8, $1828\times 8=14624$ (less than 16461)

If n=9, $1829\times 9=16461$ (exactly equal 16461)

Therefore, n=9.

Moreover, the answer is a perfect square.

844561 的平方根是 919.

			9	1	9
	1	6	4	6	1
		1	8	2	
					9
					1

另一個完全平方數的例子

求　509796　的平方根.

			n		
5	0	9	7	9	6
	n				
	1				

$6\times6=36$, $\underline{7\times7=49}$, $8\times8=64$

			7		
5	0	9	7	9	6
	7				
	1				

50-49=1

			7		
	1	9	7	9	6
	7 ×2=14				
	1				

			7		
	1	9	7	9	6
	1	4			
			1		

$\underline{141\times 1=141}$, $142\times 2=284$

			7	n	
	1	9	7	9	6
	1	4			
			n		
			1		

197-141=56

			7	1	
		5	6	9	6
	1	4			
			1 ×2=2		
			1		

			7	1	
		5	6	9	6
	1	4	2		
			1		

			7	1	n
		5	6	9	6
		1	4	2	
					n
					1

1424×4=5696

所以, 509796 的平方根是 714.

			7	1	4
		5	6	9	6
		1	4	2	
					4
					1

圖解開方術的數學原理

- 假設 a 是一個整百位數，b 是一個整十位數，c 是一個整個位數，而 N 是(a+b+c)的平方。

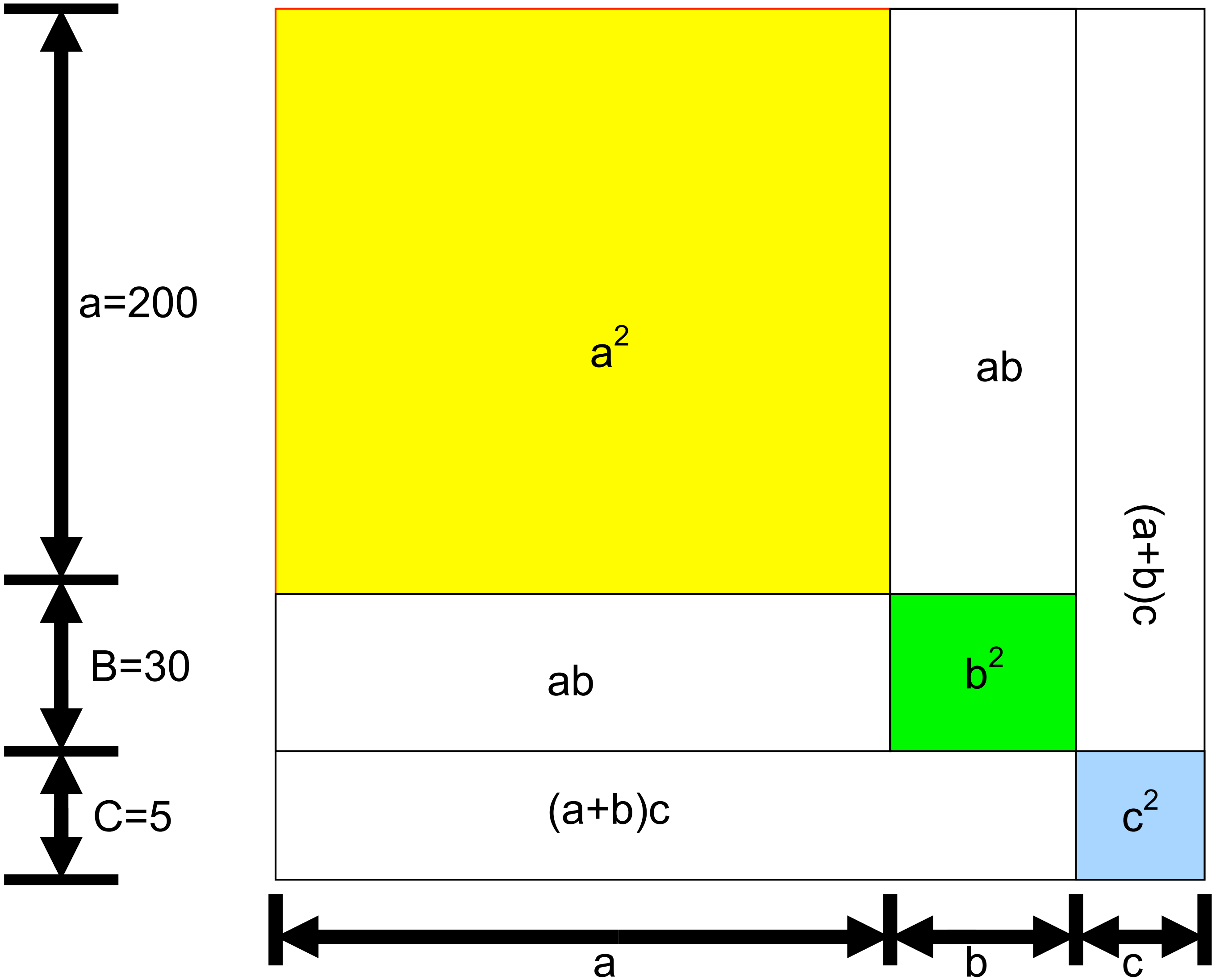
- 例如，N=55225，a=200，b=30，c=5, $N=(a+b+c)^2 = (200+30+5)^2 = (235)^2$ 。

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = a^2+(2a+b)b$

- $(a+b+c)^2=(a+b)^2 +[2(a+b)+c]\ c$

總邊長＝(a+b+c) ＝ 235

總面積＝ $N=(a+b+c)^2$ ＝55225



$$\text{Suppose} \quad N=(a+b+c)^2$$

	商
N	實
	方法
1	下法

a	商
$N-a^2$	實
a	方法
1	下法

$a+b$	商
$N-a^2-(2a+b)b$	實
$2a$	方法
b	廉法
1	下法

$a+b$	商
$N-a^2-(2a+b)b = N-(a+b)^2$	實
$2a+2b = 2(a+b)$	方法
1	下法

$$N=(a+b+c)^2$$

$a+b+c$	商
$N-(a+b)^2-[2(a+b)+c]c \quad = N-(a+b+c)^2 \ =0$	實
$2(a+b)$	方法
c	隅法
1	下法

《九章算術》第四卷「少廣」其中
「若開之不盡者，為不可開，當以面命之。」

古時中國人懂得 Irrational Numbers (無理數) ?

劉徽的注文:「不以面命之，加定法如前，求其微數。微數無名者以為分子，其一退以十為母，其再退以百為母。退之彌下，其分彌細，則朱幂雖有所棄之數，不足言之也。」

以十進小數來**無限逼近**無理方根？

但未有明確證據說明古時中國人全面認識無理數。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_li031201_1/index.html

開立方術

$\sqrt[3]{}$

開立方
《九章算術》　少廣

- 開立方術曰：置積為實。借一算步之，超二等。議所得，以再乘所借一算為法，而除之。除已，三之為定法。復除，折而下。以三乘所得數置中行。復借一算置下行。步之，中超一，下超二等。復置議，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除。除已，倍下、并中從定法。復除，折下如前。開之不盡者，亦為不可開。若積有分者，通分內子為定實。定實乃開之，訖，開其母以報除。若母不可開者，又以母再乘定實，乃開之。訖，令如母而一。

- 今有積一百八十六萬八百六十七尺。問為立方幾何？ 答曰：一百二十三尺。
- 今有積一千九百五十三尺、八分尺之一。問為立方幾何？ 答曰：一十二尺半。
- 今有積六萬三千四百一尺、五百一十二分尺之四百四十七。問為立方幾何？ 答曰：三十九尺、八分尺之七。
- 又有積一百九十三萬七千五百四十一尺、二十七分尺之一十七。問為立方幾何？ 答曰：一百二十四尺、太半尺。

宋著名數學家賈憲

- 其生平資料不詳，只知其師承楚衍（《宋史·藝文志》）。後世推斷其著書年代大致是在1023-1050年。
- 撰有《黃帝九章算法細草》九卷，可惜已失傳。
- 提出“增乘開方法”。
- 楊輝在《九章算法纂類》中載有賈憲“增乘開平方法”、“增乘開立方法”；
- 楊輝也在《詳解九章算法》中載有賈憲的“開方作法本源”圖、“增乘方法求廉草”和用增乘開方法開四次方的例子。

楊輝在《九章算法纂類》中載賈憲的**<u>增乘開立方法</u>**:

1. 實上商置第一位得數。
2. 以上商乘下法置廉，乘廉入方，除實訖。
3. 復以上商乘下法入廉，乘廉入方。
4. 又乘下法入廉，其方一、廉二、下三退。
5. 再於第一位商數之次，復商第二位得數，以乘下法入廉，乘廉入方，命上商除實訖。
6. 復以次商乘下法入廉，乘廉入方。
7. 又乘下法入廉，其方一、廉二、下三退，如前。
8. 上商第三位得數，乘下法入廉，乘廉入方，命上商除實。
9. 適盡。得立方一面之數。

1：實上商置第一位得數。

				1 百	十	個		商
1	8	6	0	8	6	7		實
								方
								廉
1								下法

- 個 : Is it possible that

  $1\times1\times1 \leq 1860867 < 10\times10\times10$?

- 十 : Is it possible that

  $1\times1\times1 \leq 1860 < 10\times10\times10$?

- 百 : Is it possible that

  $1\times1\times1 \leq 1 < 10\times10\times10$?

Find the largest single digit integer n that $n\times n\times n \leq 1$. So, $n=1$.

2：以上商乘下法置廉，乘廉入方，除實訖。

				1				商
=1-1×1	8	6	0	8	6	7		實
1 =1×1								方
1 =1×1								廉
1								下法

3：復以上商乘下法入廉，乘廉入方。

				1				商
	8	6	0	8	6	7		實
3 =1+1×2								方
2 =1+1×1								廉
1								下法

4：又乘下法入廉

				1				商
	8	6	0	8	6	7		實
3								方
$\boxed{3 \\ =2+1\times 1}$								廉
1								下法

其方一、廉二、下三退。

				1				商
	8	6	0	8	6	7		實
	3							方
		3						廉
			1					下法

5：再於第一位商數之次，復商第二位得數，以乘下法入廉，乘廉入方，命上商除實訖。

				1	2			商
	1	3 =860-364×2	2	8	6	7		實
	3	6	4 =2×32					方
		3	2 =2×1					廉
			1					下法

Find the largest single digit integer n such that

$$n\times\left(\underbrace{n\times(\underbrace{n\times\overset{\text{下法}}{1}+\overset{\text{廉}}{30}}_{\text{new 廉}})+\overset{\text{方}}{300}}_{\text{new 方}}\right)\le 860.$$ So, n=2.

6 ：復以次商乘下法入廉，乘廉入方。

				1	2			商
	1	3	2	8	6	7		實
	4	3 =364+2×34	2					方
		3	4 =2+2×1					廉
			1					下法

7：又乘下法入廉

				1	2			商
	1	3	2	8	6	7		實
	4	3	2					方
		3	$\boxed{6 =4+2\times1}$					廉
			1					下法

其方一、廉二、下三退，如前。

				1	2			商
	1	3	2	8	6	7		實
		4	3	2				方
				3	6			廉
						1		下法

8：上商第三位得數，乘下法入廉，乘廉入方，命上商除實。適盡。得立方一面之數。

				1	2	3			商
			=132867-3×44289			0			實
		4	4 =43200+3×363	2	8	9			方
				3	6	3 =3×1			廉
						1			下法

Find the largest single digit integer n such that

$$n\times \underbrace{(n\times\underbrace{(n\times\overset{下法}{1}+\overset{廉}{360})}_{\text{new 廉}}+\overset{方}{43200})}_{\text{new 方}} \le 132867. \text{ So, } n=3.$$

開立方術的數學原理

- 假設 a 是一個整百位數，b 是一個整十位數，c 是一個整個位數，而 N 是(a+b+c)的立方。例如，N=1860867，a=100，b=20，c=3, $N=(a+b+c)^3 = (100+20+3)^3 = (123)^3$ 。
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
  $= a^3+[3a^2+3ab+b^2]\times b$
- $(a+b+c)^3 = (a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$
  $= (a+b)^3+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]\times c$

Suppose $N=(a+b+c)^3$

	商
N	實
	方
	廉
1	下法

１：實上商置第一位得數。
２：以上商乘下法置廉，乘廉入方，除實訖。

a	商
$N-a^2 \times a = N-a^3$	實
$a \times a = a^2$	方
$1 \times a = a$	廉
1	下法

3：復以上商乘下法入廉，乘廉入方。

a	商
$N-a^3$	實
$a^2+2a\times a = 3a^2$	方
$a+1\times a = 2a$	廉
1	下法

4：又乘下法入廉，其方一、廉二、下三退。

a	商
$N-a^3$	實
$3a^2$	方
$2a+1\times a = 3a$	廉
1	下法

5：再於第一位商數之次，復商第二位得數，

$a+b$	商
$N-a^3$	實
$3a^2$	方
$3a$	廉
1	下法

以乘下法入廉，乘廉入方，命上商除實訖。

$a+b$	商
$N-a^3-[3a^2+3ab+b^2]\times b = N-(a+b)^3$	實
$3a^2+(3a+b)\times b = 3a^2+3ab+b^2$	方
$3a+1\times b = 3a+b$	廉
1	下法

6：復以次商乘下法入廉，乘廉入方。

$a+b$	商
$N-(a+b)^3$	實
$3a^2+3ab+b^2+[3a+2b]\times b = 3(a+b)^2$	方
$3a+b+1\times b = 3a+2b$	廉
1	下法

7：又乘下法入廉，其方一、廉二、下三退，如前。

$a+b$	商
$N-(a+b)^3$	實
$3(a+b)^2$	方
$3a+2b+1\times b = 3(a+b)$	廉
1	下法

8：上商第三位得數，

$a+b+c$	商
$N-(a+b)^3$	實
$3(a+b)^2$	方
$3(a+b)$	廉
1	下法

乘下法入廉，乘廉入方，命上商除實。適盡。
得立方一面之數。

$a+b+c$	商
$N-(a+b)^3-[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]\times c$ $= N-(a+b+c)^3 = 0$	實
$3(a+b)^2+[3(a+b)+c]\times c$	方
$3(a+b)+1\times c = 3(a+b)+c$	廉
1	下法

另一個例子　求９６６３５９７的立方根

１：實上商置第一位得數。

				2				商
9	6	6	3	5	9	7		實
								方
								廉
1								下法

２：以上商乘下法置廉，乘廉入方，除實訖。

				2				商
1 =9-2×4	6	6	3	5	9	7		實
4 ＝2×2								方
2 ＝2×1								廉
1								下法

3：復以上商乘下法入廉，乘廉入方。

					2				商
	1	6	6	3	5	9	7		實
1	2 $=4+2\times4$								方
	4 $=2+2\times1$								廉
	1								下法

4：又乘下法入廉

					2				商
	1	6	6	3	5	9	7		實
1	2								方
	6 $=4+2\times1$								廉
	1								下法

其方一、廉二、下三退。

				2				商
1	6	6	3	5	9	7		實
1	2							方
		6						廉
			1					下法

5：再於第一位商數之次，復商第二位得數，以乘下法入廉，乘廉入方

				2	1			商
1	6	6	3	5	9	7		實
1	2	6	1 =1×61					方
		6	1 ＝1×1					廉
			1					下法

命上商除實訖。

				2	1			商
	4	0 =1663-1×1261	2	5	9	7		實
1	2	6	1					方
		6	1					廉
			1					下法

6：復以次商乘下法入廉，乘廉入方。

				2	1			商
	4	0	2	5	9	7		實
1	3	2 =1261+1×62	3					方
		6	2 =1+1×1					廉
			1					下法

7：又乘下法入廉

				2	1			商
	4	0	2	5	9	7		實
1	3	2	3					方
		6	3 =2+1×1					廉
			1					下法

其方一、廉二、下三退，如前。

				2	1			商
	4	0	2	5	9	7		實
	1	3	2	3				方
				6	3			廉
						1		下法

8：上商第三位得數，乘下法入廉，乘廉入方

				2	1	3		商
	4	0	2	5	9	7		實
	1	3	4	1 =132300+3×633	9	9		方
				6	3	3 =3×1		廉
						1		下法

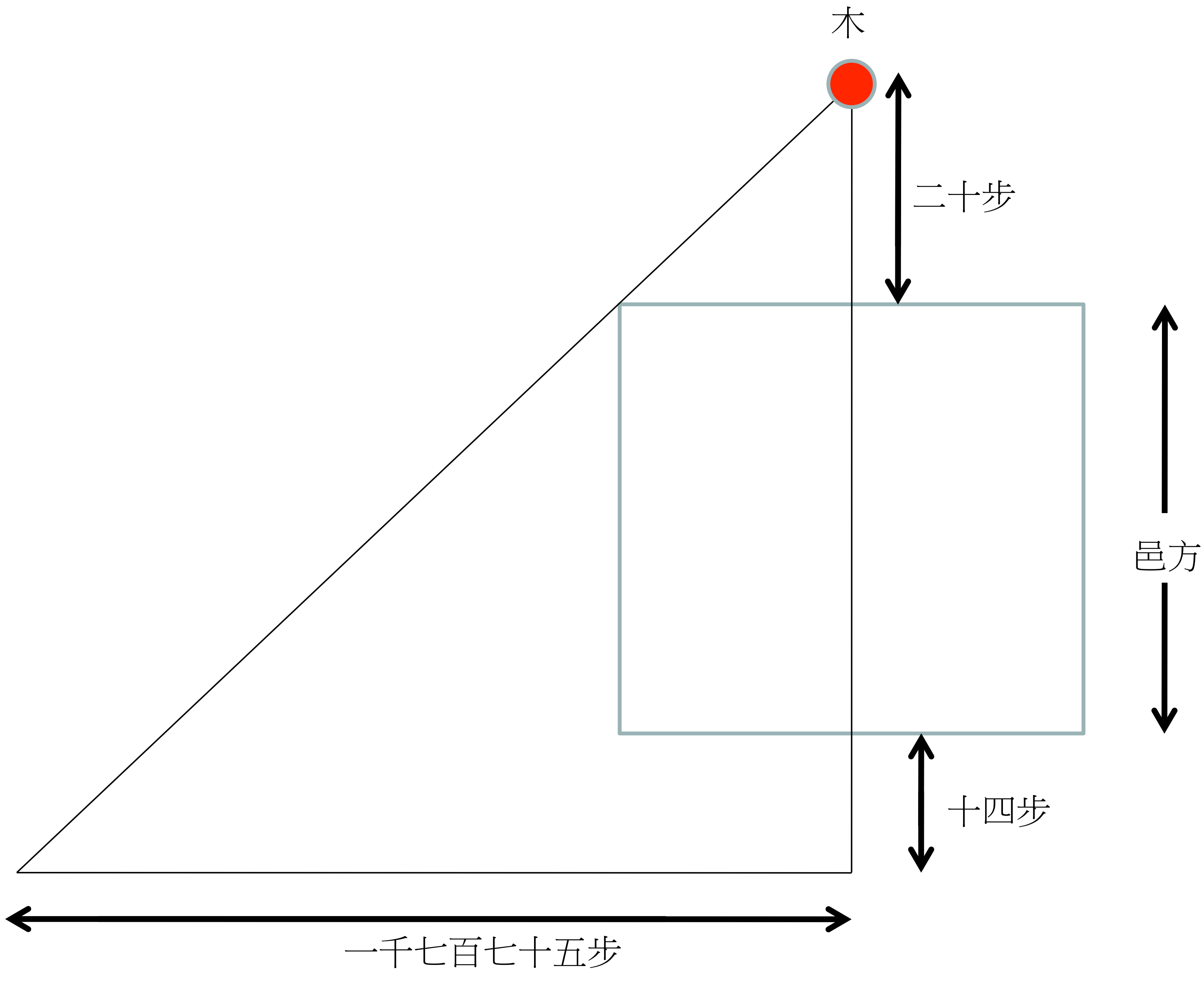
命上商除實。適盡。得立方一面之數。

				2	1	3		商
				=402597-3×134199		0		實
	1	3	4	1	9	9		方
				6	3	3		廉
						1		下法

解一元二次方程
Solving Quadratic Equation

《九章算術》卷九「勾股」第二十問

- 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何？
- 答曰：二百五十步。
- 術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之，為實。并出南門步數為從法，開方除之，即邑方。


木
二十步
邑方
十四步
一千七百七十五步

以出北門步數乘西行步數，倍之，為實。
并出南門步數為從法，開方除之，即邑方。

北門步數 = 二十步

西行步數 = 一千七百七十五步

南門步數 = 十四步

實 = 2×北門步數×西行步數 = 71000步

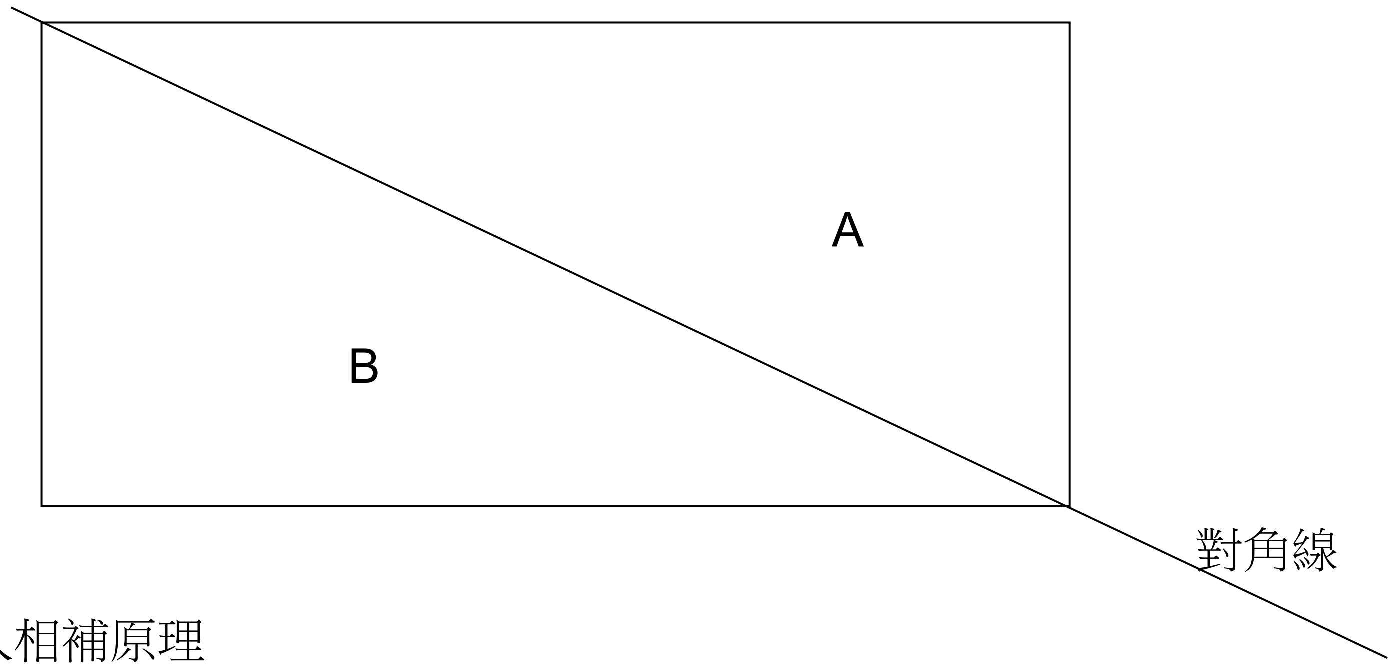
從法 = 北門步數+南門步數 = 34步

邑方× (邑方+34) = 71000

(邑方)^2 + 34 ×邑方 = 71000

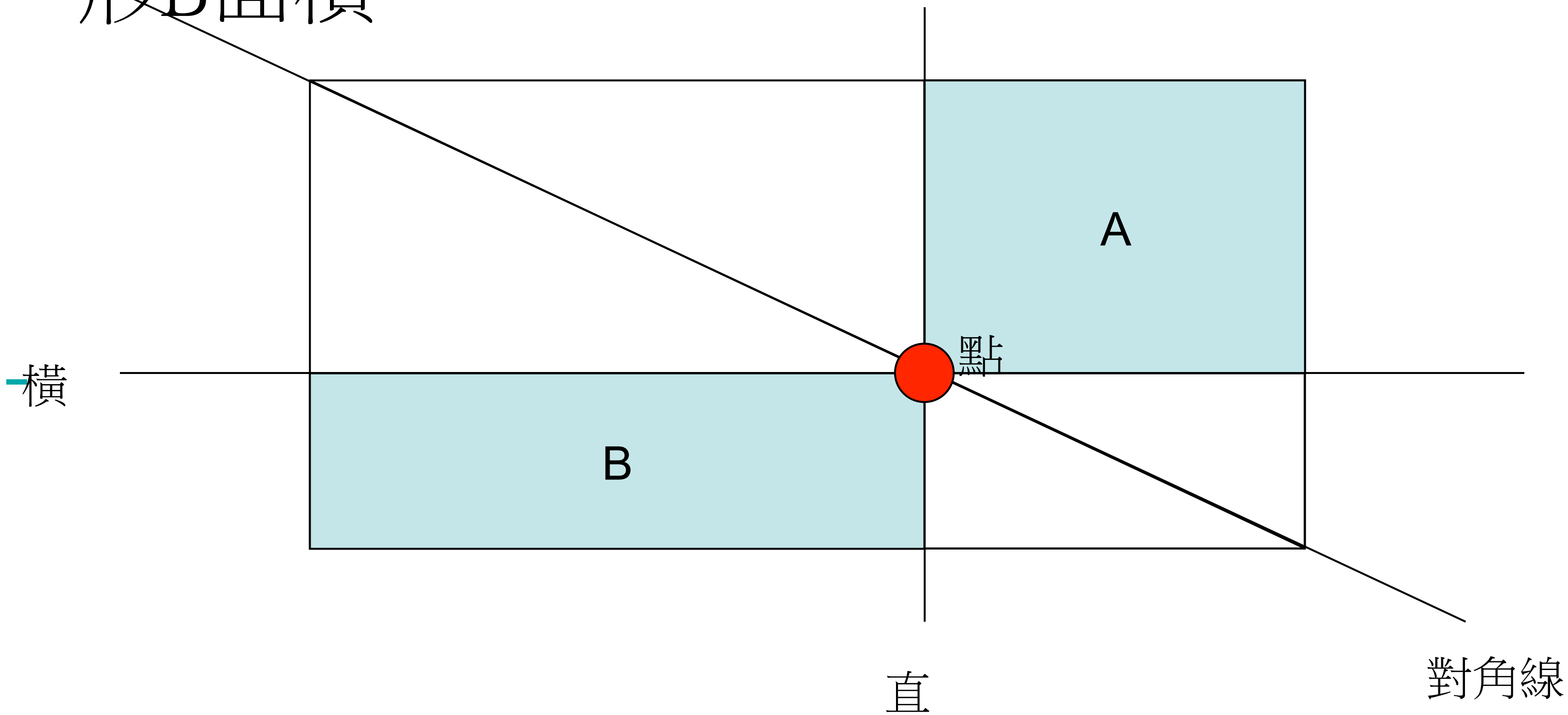
$x^2 + ax = b$ （要求 $b>0$，直到秦九韶之後）

引理：在一個任意的長方形裡畫一條對角線，如圖所示。則，三角形A的面積等於三角形B的面積。

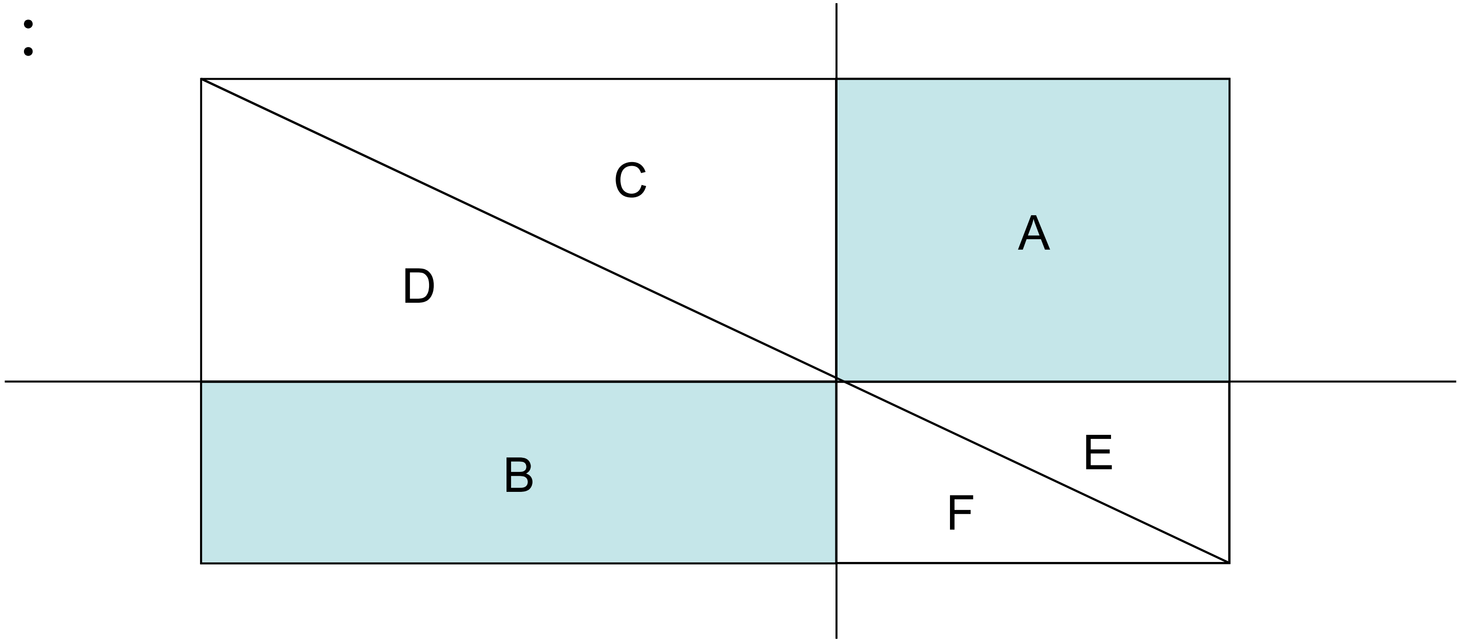


證明：出入相補原理

引理：在一個任意的長方形裡畫一條對角線，沿對角線任意一點作橫、直兩條垂直線把原長方形分成四個較小的長方形，如圖所示。則，長方形A面積＝長方形B面積。



証明：



原長方形被對角線均分為兩個面積相等的三角形：

C面積＋A面積＋E面積 ＝ D面積＋B面積＋F面積。

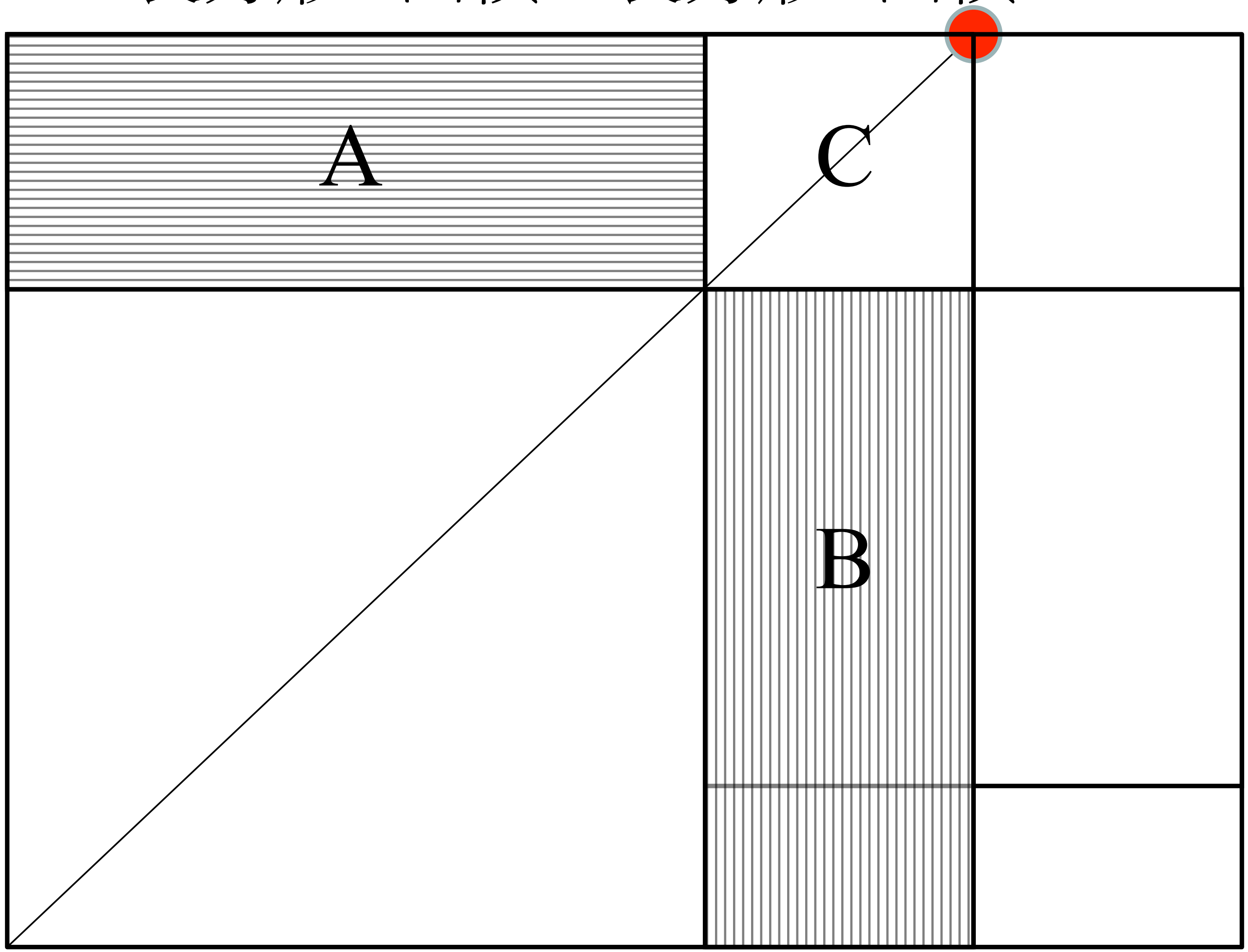
但是，三角形C面積＝三角形D面積。

又，三角形E面積＝三角形F面積。

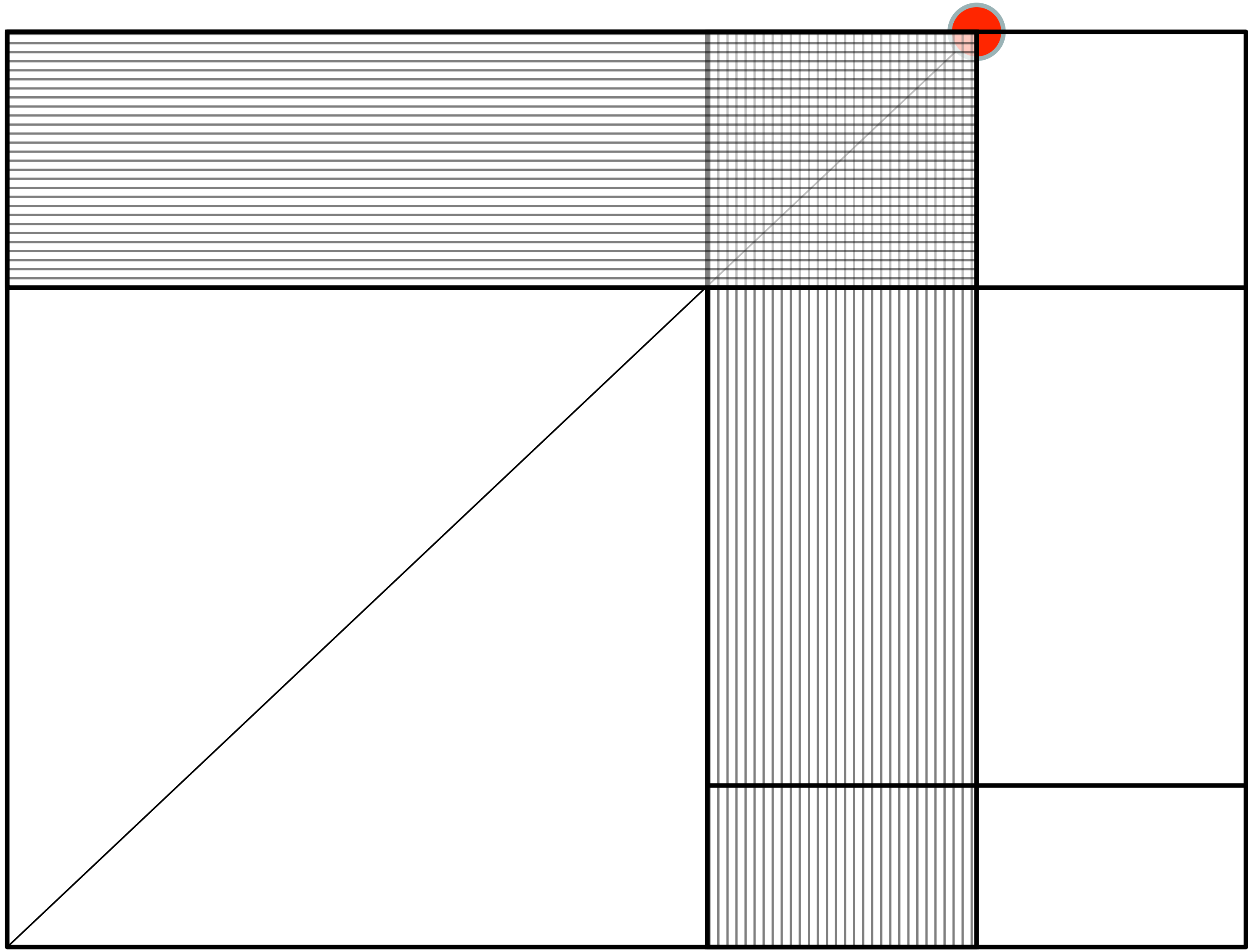
所以，長方形A面積＝長方形B面積。

利用引理

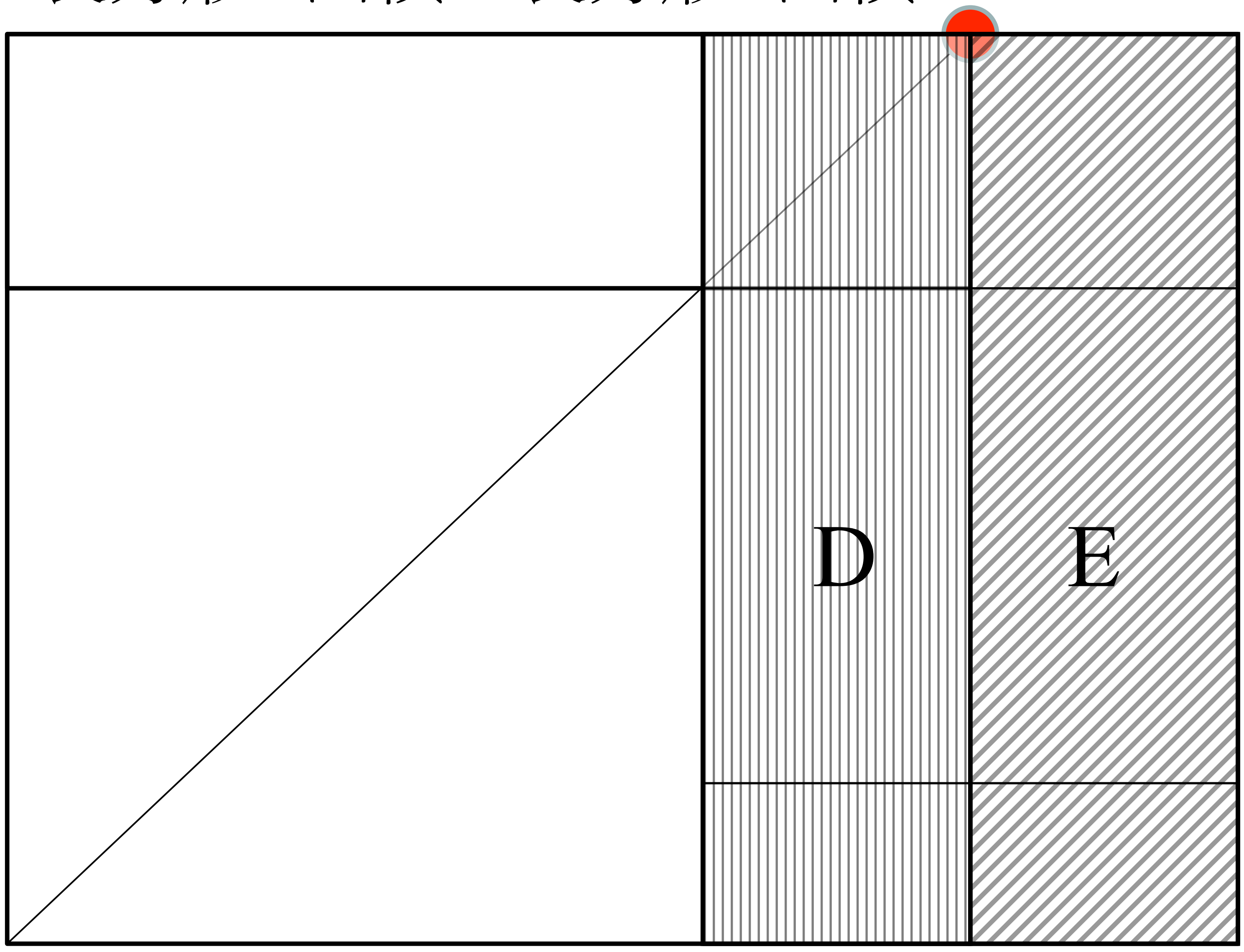
長方形A面積＝長方形B面積



長方形A面積＋長方形C面積＝長方形B面積＋長方形C面積

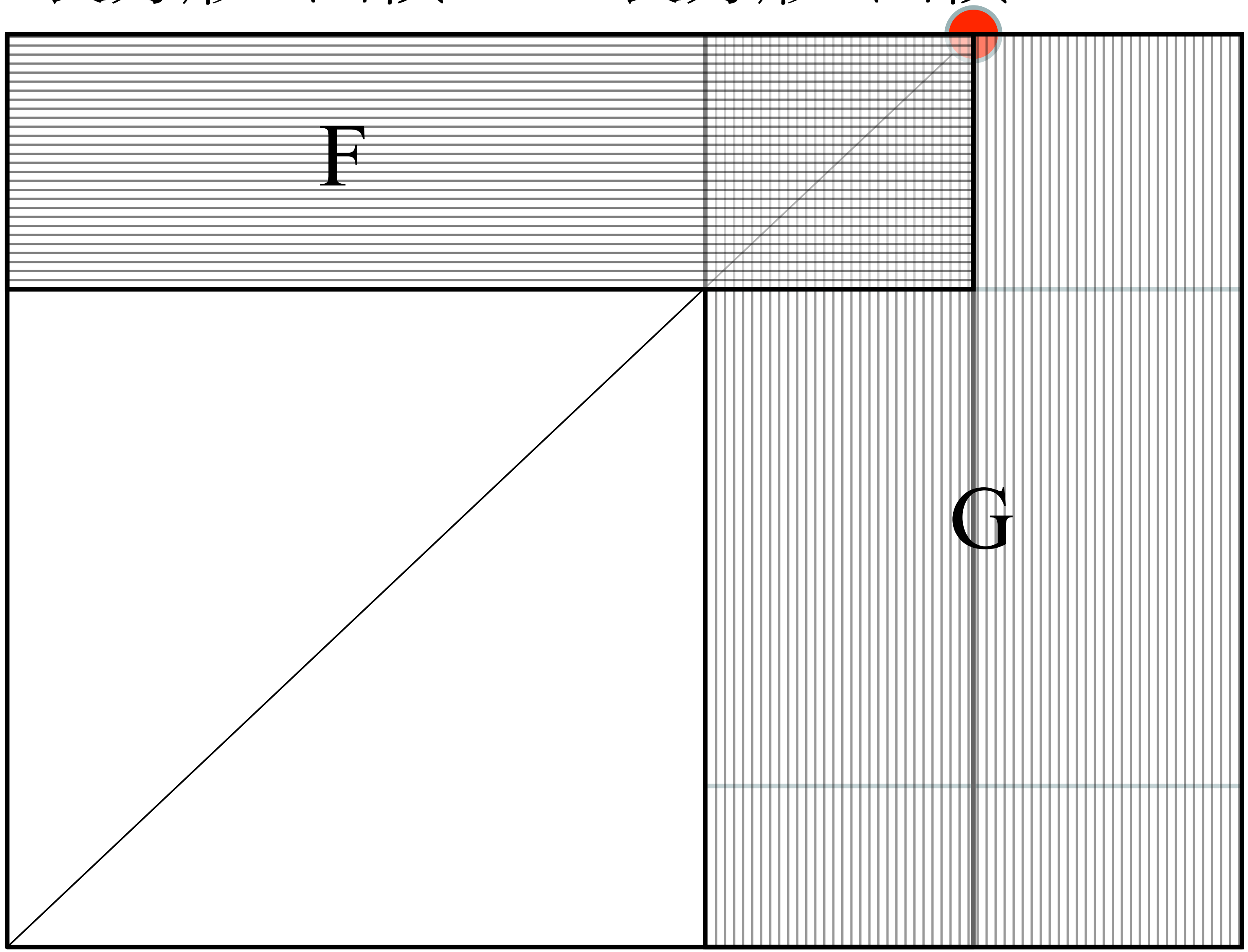


長方形D面積＝長方形E面積

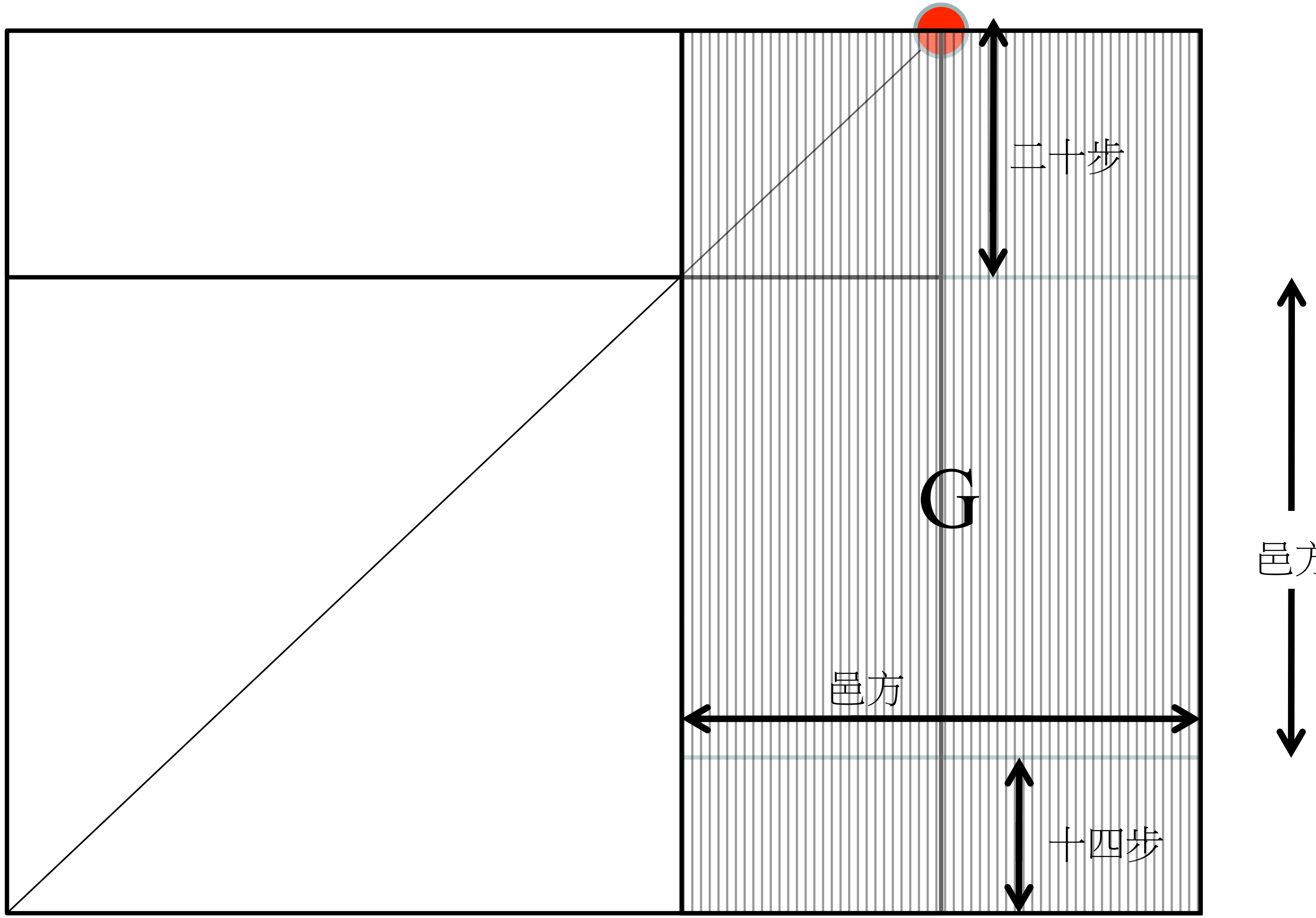


所以

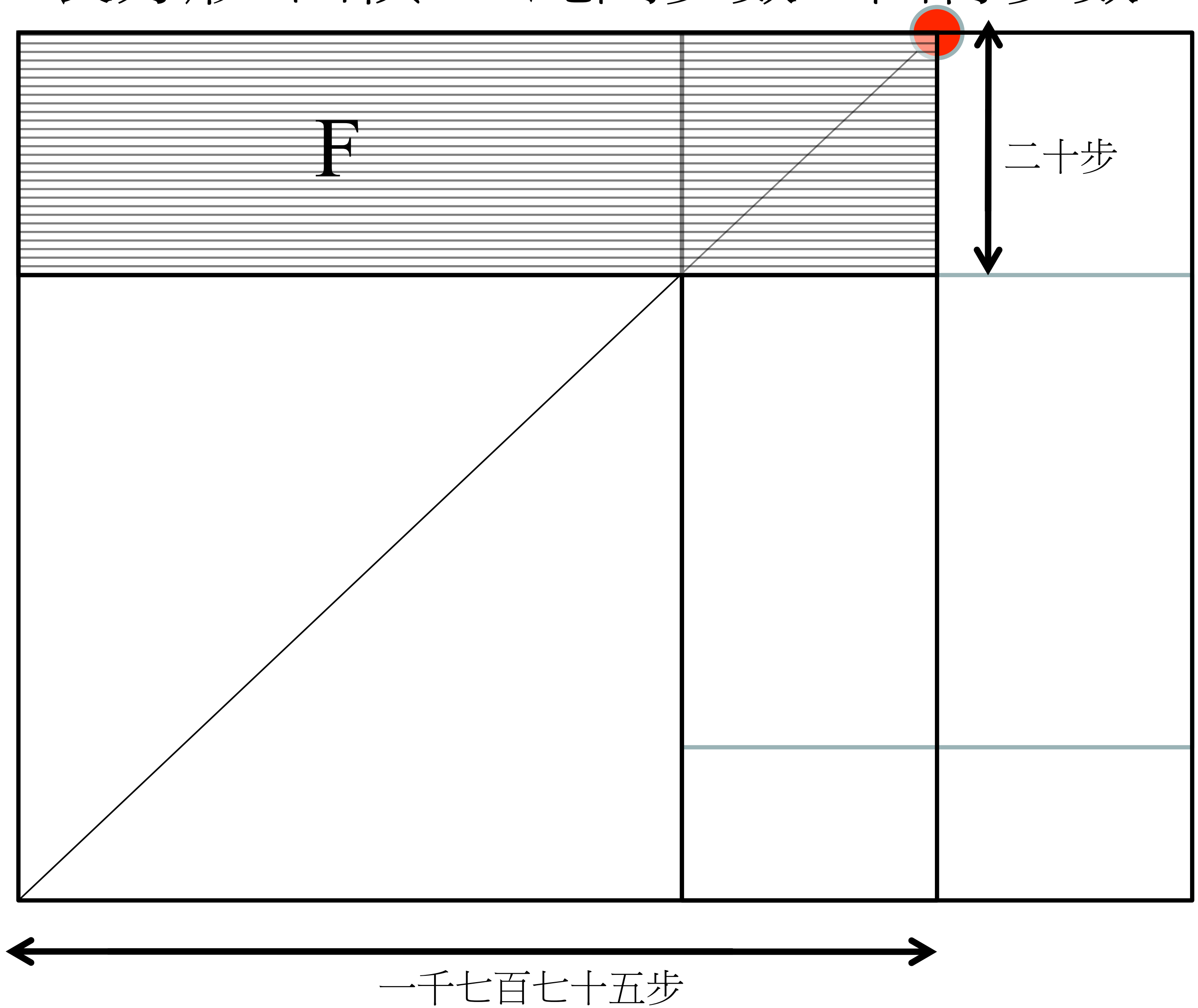
長方形G面積＝2 ×長方形F面積



長方形G面積＝邑方×(邑方+北門步數+南門步數)



長方形F面積 ＝ 北門步數 × 西行步數



由於　　長方形G面積＝2 × 長方形F面積，

而　　長方形G面積＝邑方 × (邑方+北門步數+南門步數)

＝邑方 × (邑方+從法)，

又，　　2 × 長方形F面積＝ 2 × 北門步數 × 西行步數＝實，

所以得出　　邑方 × (邑方+從法) ＝ 實。

亦即　　邑方 × (邑方+從法) ＝實，

或　　$(\text{邑方})^2 + \text{從法} \times \text{邑方} = \text{實}$，

$(\text{邑方})^2 + 34 \times \text{邑方} = 71000$ 。

開方除之

7	1	0	0	0
			3	4
		1		

- 個：Is it possible that
  $(34+1)\times 1 \leq 71000 \leq (34+9)\times 9$? ○ ✖
- 十：Is it possible that
  $(34+10)\times 1 \leq 7100 \leq (34+90)\times 9$? ○ ✖
- 百：Is it possible that
  $(34+100)\times 1 \leq 710 \leq (34+900)\times 9$? ○

determine n

			n				商
	7	1	0	0	0		實
				3	4		方法
			n				
			1				下法

- Find the largest single digit integer n so that $(100n+34)\times n \leq 710$

  找最大的個位整數 n，而$(100n+34)\times n$要不大於710 。

- If n=2, $234\times 2=468$ (less than 710)
- If n=3, $334\times 3=1002$ (over 710!!!)

Therefore, n=2.

$234\times2=468$,　$710-468=242$,　$2\times2=4$

			2				商
	2	4	2	0	0		實
			$\boxed{4}$	3	4		方法
			2×2				
				1			下法

determine n

			2	n			商
	2	4	2	0	0		實
			4	3	4		方法
				n			
				1			下法

- Find the largest single digit integer n so that $(10n+434) \times n \leq 2420$

  找最大的個位整數 n，而$(10n+234) \times n$要不大於2420 。

- If $n=4$, $474 \times 4=1896$ (less than 2420)
- If $n=5$, $484 \times 5=2420$ (equal 2420)

Therefore, $n=5$.

$$484 \times 5 = 2420, \quad 2420 - 2420 = 0$$

			2	5			商
					0		實
			4	8	4		方法
				1			下法

問邑方幾何？ 答曰：二百五十步。

		2	5	0
		4	8	4
			1	

「開方除之」的數學原理：

若要求得 x^2 +從x =實 的正值解

假設 x = 100a+10b+c，a百位，b十位，c個位。

	商
實	實
從	方法
1	下法

100a	商
實-(100a+從)a	實
100a＋從	方法
1	下法

$100a+10b$	商
實$-(100a+$從$)a-(200a+$從$+10b)b$	實
$200a+$從	方法
$10b$	廉法
1	下法

$100a+10b$	商
實$-(100a+$從$)a-(200a+$從$+10b)b=$實$-(100a+10b)^2-(100a+10b)$從	實
$200a+20b+$從$=2(100a+10b)+$從	方法
1	下法

$$x = 100a+10b+c$$

$100a+10b+c$	商
實$-(100a+10b)^2-(100a+10b)$從$-[2(100a+10b)+$從$+c]c$ $=$實$-(100a+10b+c)^2-(100a+10b+c)$從 $=$實$-x^2-$從$x=0$ （因為　x^2+從$x=$實）	實
$2(100a+10b)$	方法
c	隅法
1	下法

另一例子 $x^2 + 45x = 20664$

2	0	6	6	4
			4	5
		1		

- 個：Is it possible that
  $(45+1)\times 1 \le 20664 \le (45+9)\times 9$?

- 十：Is it possible that
  $(45+10)\times 1 \le 2066 \le (45+90)\times 9$?

- 百：Is it possible that
  $(45+100)\times 1 \le 206 \le (45+900)\times 9$?

determine n

			n				商
	2	0	6	6	4		實
				4	5		方法
			n				
			1				下法

- Find the largest single digit integer n so that $(100n+45)\times n \leq 206$

  找最大的個位整數 n，而$(100n+45)\times n$要不大於206 。
- If $n=1$, $145\times 1=145$ (less than 206)
- If $n=2$, $245\times 2=490$ (over 206!!!)

Therefore, $n=1$.

$$145 \times 1 = 145, \quad 206 - 145 = 61, \quad 1 \times 2 = 2$$

			1				商
		6	1	6	4		實
			$\boxed{2}$	4	5		方法
			1×2				
				1			下法

determine n

			1	$\boxed{n}$			商
		6	1	6	4		實
			2	4	5		方法
				$\boxed{n}$			
				1			下法

- Find the largest single digit integer n so that $(10n+245)\times n \leq 616$

  找最大的個位整數 n，而$(10n+245)\times n$要不大於615 。

- If n=2, $265\times 2=530$ (less than 616)
- If n=3, $275\times 3=825$ (over 616!!!)

Therefore, n=2.

$$265\times2=530,\ 616-530=86,\ 2\times2=4$$

			1	2			商
			8	6	4		實
			2	8 (=4+4)	5		方法
				$2\times2=4$			
					1		下法

determine n

			1	2	n		商
			8	6	4		實
			2	8	5		方法
					n		
					1		下法

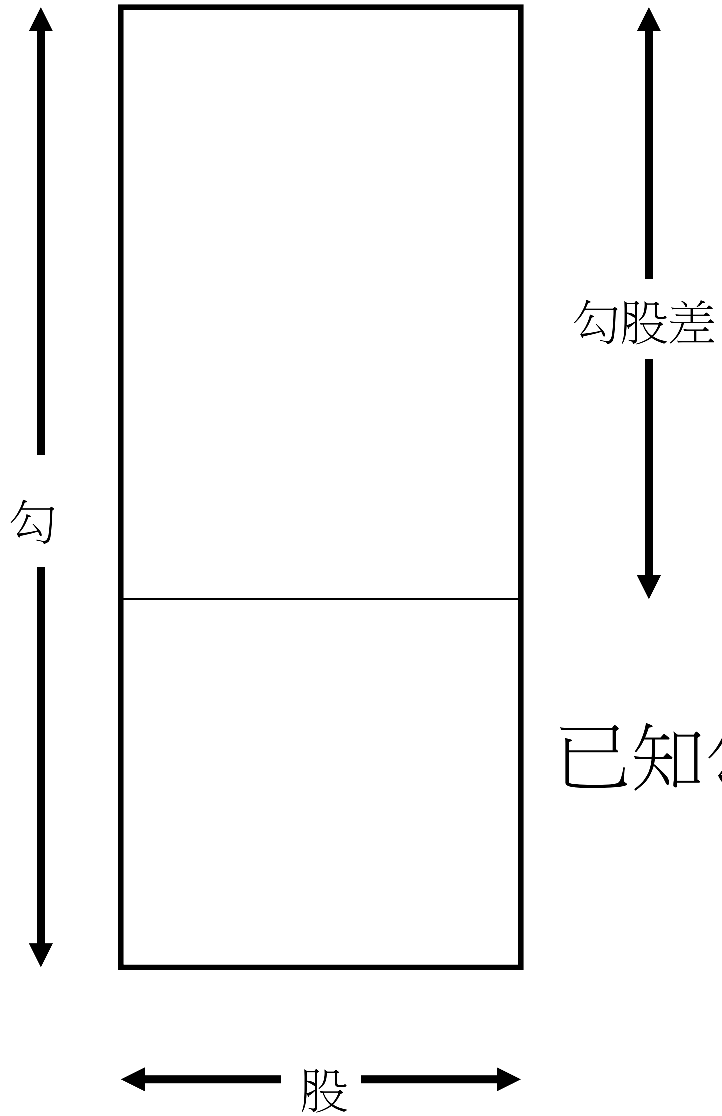
- Find the largest single digit integer n so that $(n+285)\times n \le 864$

  找最大的個位整數 n，而$(n+285)\times n$要不大於864 。
- If n=2, $287\times 2=574$ (less than 864)
- If n=3, $288\times 3=864$ (equal 864)

Therefore, n=3.

求得 $x^2+45x=20664$ 的正值解是 $x=123$。
（這個方法並不尋求另外一個解 $x=-168$）。

			1	2	3		商
							實
			2	8	8		方法
					1		下法



在圖形上的意義

$$x^2 + a\,x = b \quad (a\,,\,b > 0)$$

a ＝勾股差

b ＝勾股積

已知勾股積及勾股差，求勾、股。

再來一個 $a<0$ 的例子 $x^2-45x=20664$

2	0	6	6	4
		負	4	5
		1		

determine n

			n				商
	2	0	6	6	4		實
			負	4	5		方法
			n				
			1				下法

- Find the largest single digit integer n so that $(100n - 45) \times n \leq 206$
  找最大的個位整數 n，而(100n+45)×n要不大於206 。
- If n=1, $(100-45)\times 1=55$ (less than 206)
- If n=2, $(200-45)\times 2=310$ (over 206!!!)

Therefore, n=1.

$(100-45)\times 1=55$, $206-55=151$, $1\times 2=2$

			1				商
	1	5	1	6	4		實
			負	4	5		方法
			2 $=1\times 2$				
				1			下法

determine n

			1	n			商
	1	5	1	6	4		實
			負	4	5		方法
			2	n			
				1			下法

- Find the largest single digit integer n so that $(10n + 200 - 45) \times n \leq 1516$
  找最大的個位整數 n，而(10n+200-45)×n要不大於1516 。
- If n=5, (50+200-45)×5=1025 (less than 1516)
- If n=6, (60+200-45)× 6=1290 (less than 1516)
- If n=7, (70+200-45)× 7=1575 (over 1516!!!)

Therefore, n=6.

$215\times 6=1290$, $1516-1290=226$, $6\times 2=12$

			1	6			商
		2	2	6	4		實
			負	4	5		方法
			3 $6\times 2=12$ $20+12=32$	2			
					1		下法

determine n

			1	6	n		商
		2	2	6	4		實
			負	4	5		方法
			3	2	n		
					1		下法

- Find the largest single digit integer n so that $(n+320-45)\times n \leq 2264$

  找最大的個位整數 n，而$(n+320-45)\times n$要不大於2264 。

- If n=7, $(7+275)\times 7=1974$ (less than 2264)
- If n=8, $(8+275)\times 8=2264$ (equal 2264)

Therefore, n=8.

求得 x^2-45x = 20664 的正值解是 x =168。

			1	6	8		商
							實
			負	4	5		方法
			3	2	8		
					1		下法

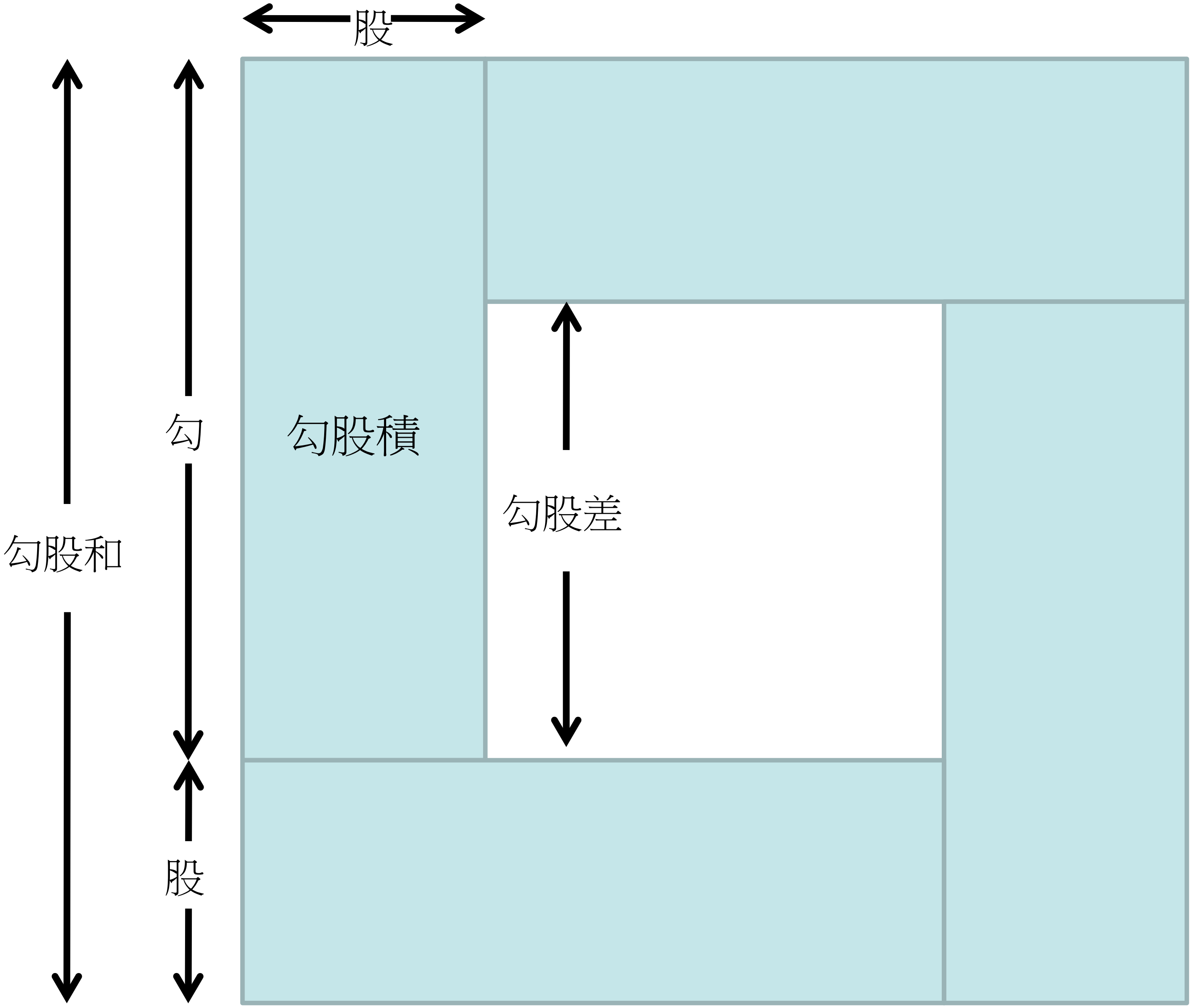
若有負係數於x^2一項

$$-x^2 + a x = b \quad (a, b > 0)$$

a ＝勾股和

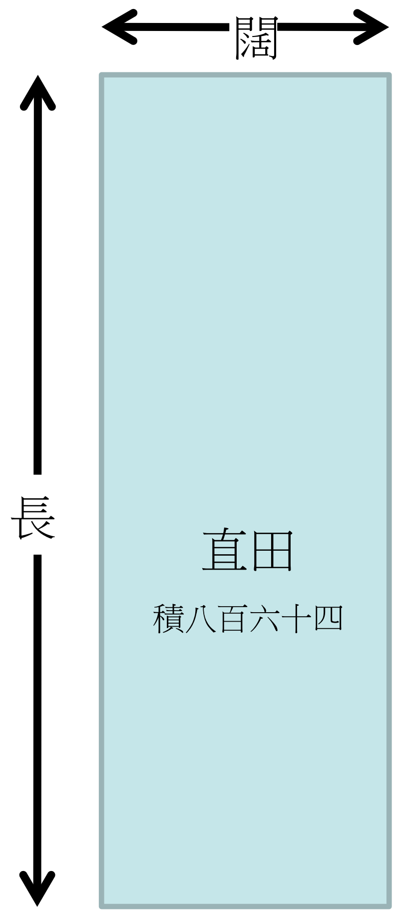
b ＝勾股積

已知勾股積及勾股和，求勾、股。


股
勾股和
勾
勾股積
勾股差
股

南宋數學家楊輝在他的《田畝比類乘除捷法》中，輯錄了北宋數學家劉益的《議古根源》中二十二個問題（注：《議古根源》一書今已失傳）。當中亦有二次方程。

問：直田積八百六十四步，只雲長闊共六十步，欲先求闊步得幾何？
答曰：二十四步。
問：欲先求長步得幾何？
答曰：四十八步。
問：長闊差幾何？
答曰：十二步。



積八百六十四步，長闊共六十步。

假設 x 為闊步數，長步數則為（$60-x$）步。

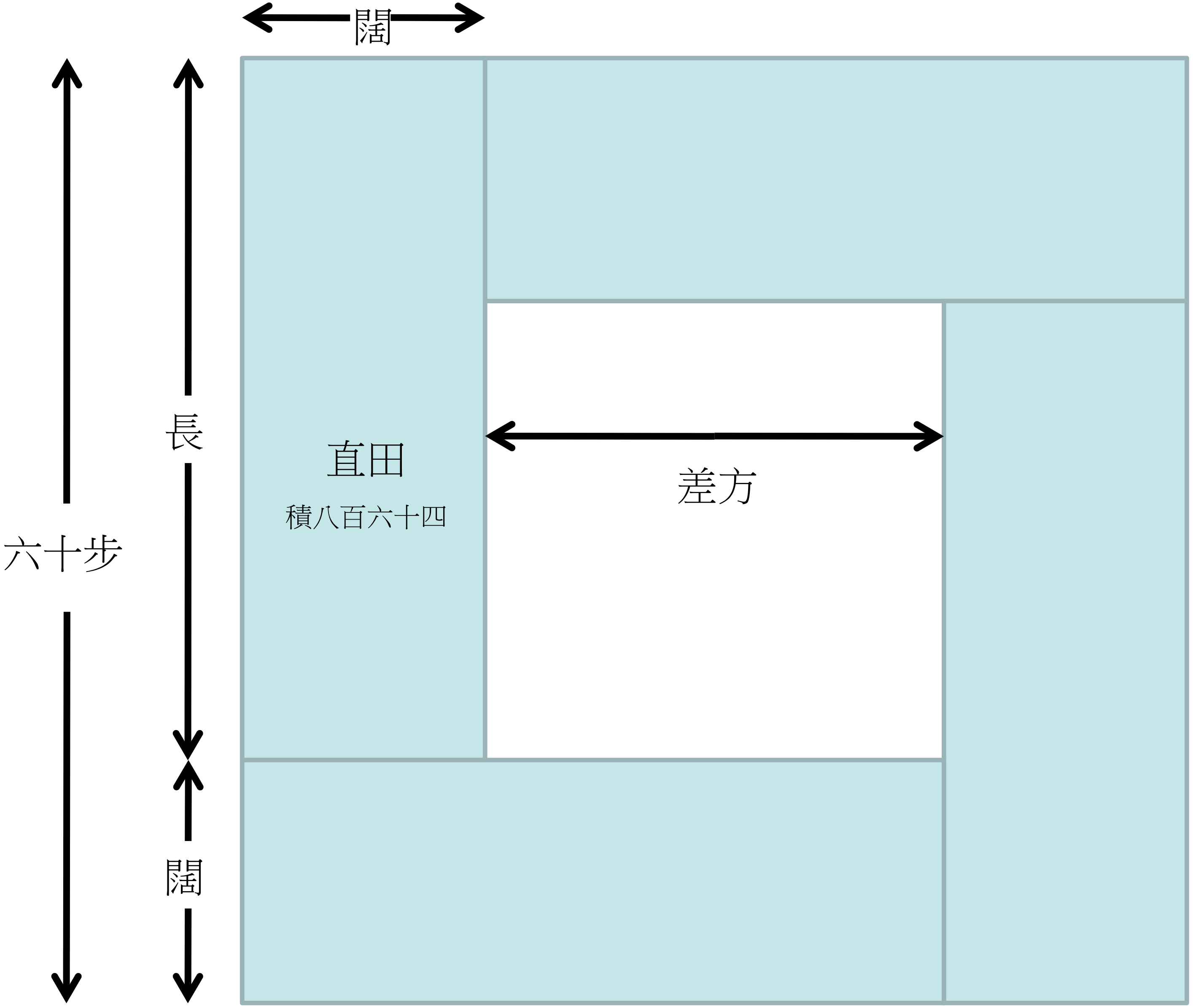
所以，

直田面積 $=(60-x)\times x=864$，

即二次方程

$$-x^2+60x=864$$

注：負係數於x^2一項



（長＋闊）^{2} ＝ 4 × 直田面積 ＋（差方）^{2}

$$（長＋闊）^2 = 4 \times 直田面積 +（差方）^2$$

代入數字：

$$（60）^2 = 4 \times 864 +（差方）^2$$

所以，

$$（差方）^2 =（60）^2 - 4 \times 864 = 144$$

開方後，得出

$$差方 = 12步 = 長－闊。$$

$$闊 =（60 - 12）\div 2 = 24步。$$

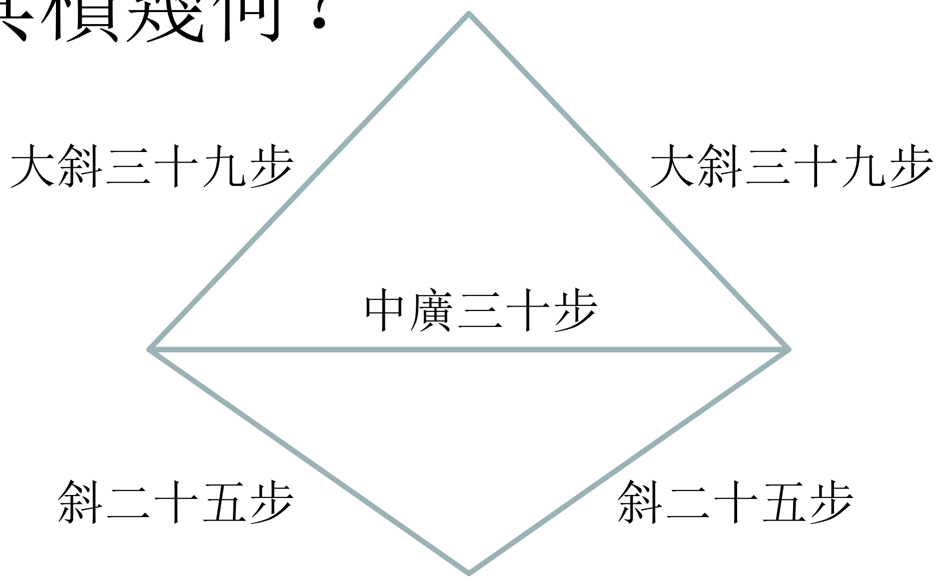
$$長 = 60 - 24 = 36步。$$

高次方程的數值解法
Solving Higher Order Equation

秦九韶的「正負開方法」

《數學九章》卷三上「尖田求積」：

問有兩尖田一段，其尖長不等，兩大斜三十九步，兩小斜二十五步，中廣三十步．欲知其積幾何？



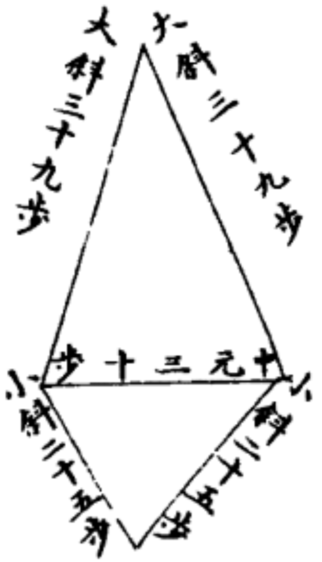
尖田求積

問有兩尖田一段其尖長不等兩大斜三十九步兩小斜二十五步中廣三十步欲知其積幾何

荅曰曰積八百四十步

術曰以少廣求之翻法入之置半廣自乘為半冪與小斜冪相減相乘為小率以半冪與大斜冪相減相乘為大率以二率相減餘自乘為實併二率倍之為從上廉以一為益隅開翻法三乘方得積一位開盡者不用翻法

尖田圖



術曰：以少廣求之，翻法入之。置半廣自乘，為半冪。與小斜冪相減相乘，為小率。以半冪與大斜冪相減相乘，為大率。以二率相減，余自乘，為實。並二率，倍之，為從上廉，以一為益隅，開翻法三乘方，得積。一位開盡者，不用翻法。

Let a=大斜，b=小斜，c=中廣，

then,

$$大斜冪 = a^2 \qquad 小斜冪 = b^2 \qquad 半冪 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

[半冪]與小斜冪相減相乘，為小率。 $$小率=\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

半冪與大斜冪相減相乘，為大率。 $$大率=\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

以二率相減，余自乘，為實。

$$實=\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\right\}^2$$

並二率，倍之，為從上廉

$$從上廉=2\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{c}{2}\right)^2\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\right\}$$

$$大率 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] \qquad 小率 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

$$x = \sqrt{大率} + \sqrt{小率}$$

Squaring both sides, we have

$$x^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] + 2\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

Factorizing, we have

$$x^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}\sqrt{\left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}\right]$$

Re-arranging, we get

$$x^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[a^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2\right] = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 \sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}\sqrt{\left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}$$

Squaring both sides, we have

$$-x^4 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[a^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2\right] x^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^4 \left(a^2 - b^2\right) = 0$$

草曰：置廣三十步，以半之，得一十五，以自乘，得二百二十五，為半冪。以小斜二十五步自乘，得六百二十五，為小斜冪．與半冪相減，余四百，與半冪二百二十五相乘得九萬步為小率。置大斜三十九步自乘，得一千五百二十一為大斜冪。與半冪二百二十五相減，余一千二百九十六，與半冪二百二十五相乘，得二十九萬一千六百，為大率．以小率九萬減大率，余二十萬一千六百，自乘，得四百六億四千二百五十六萬，為實。以小率九萬，並大率二十九萬一千六百，得三十八萬一千六百，倍之，得七十六萬三千二百，為從上廉。以一為益隅，開玲瓏翻法三乘方。

從上廉＝763200　　實＝40642560000

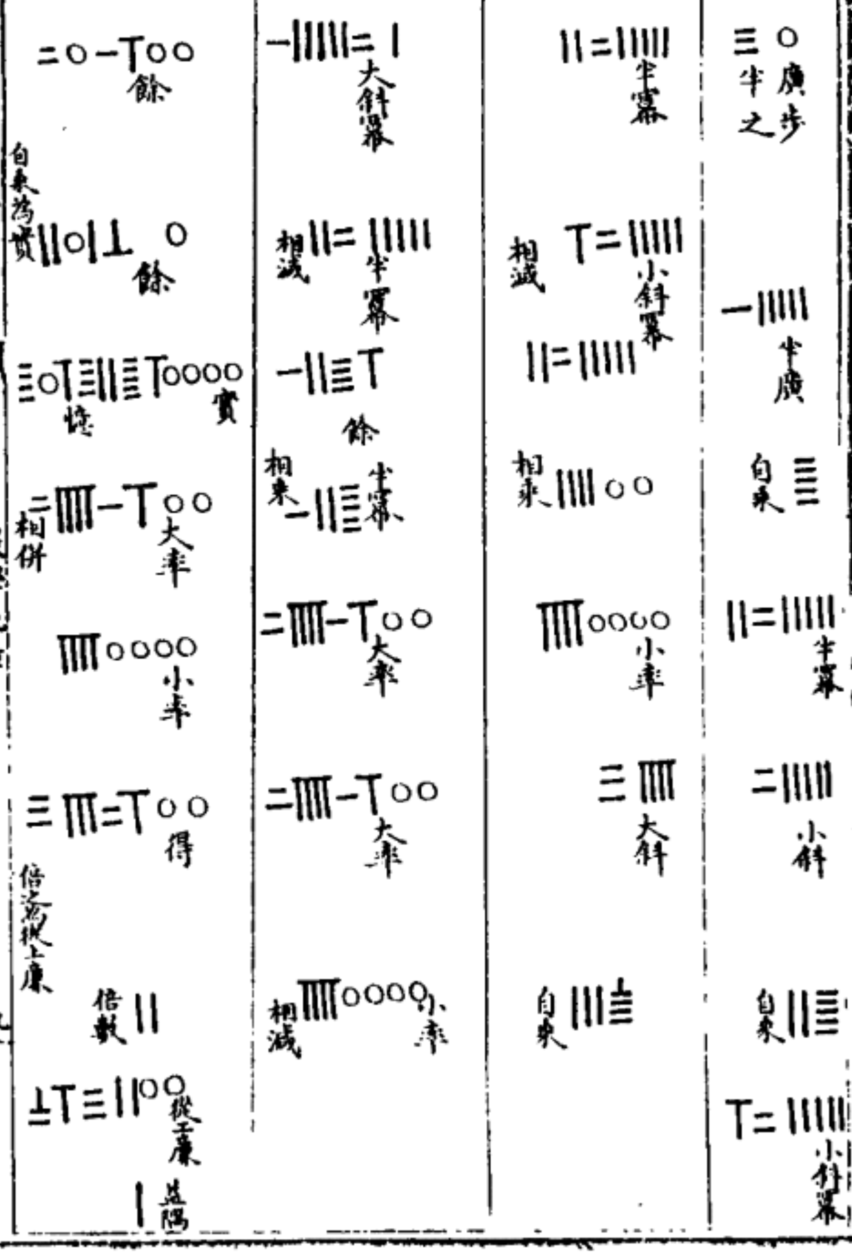
- a=大斜＝39步
- b=小斜＝25步
- c=中廣＝30步

小率=90000步

大率=291600步

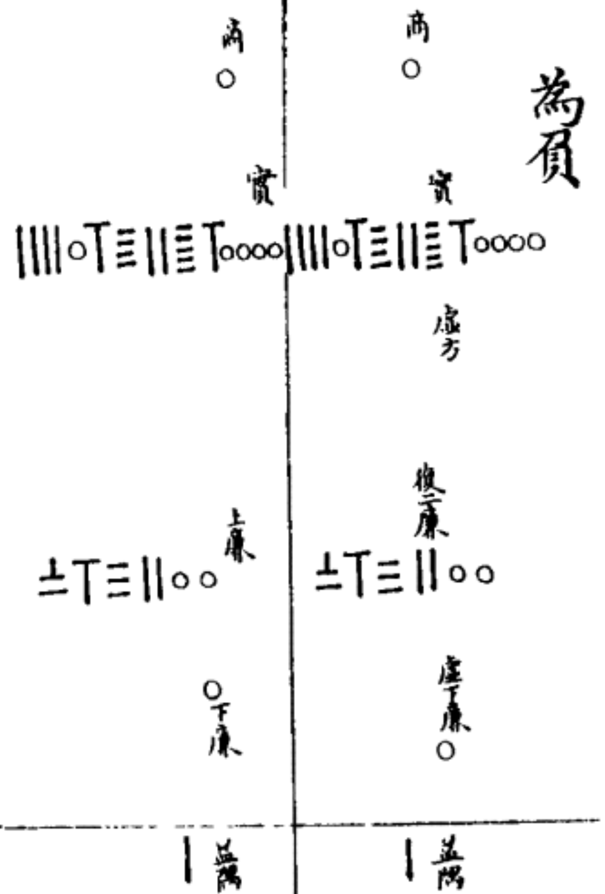
$$\underset{\text{從上廉}}{-x^4 + 763200x^2} - \underset{\text{實}}{4064256000} = 0$$

The author chose not to compute x directly by $x = \sqrt{\text{大率}} + \sqrt{\text{小率}}$
but rather, using it as an example for solving a 4th order polynomial,
namely, 開翻法三乘方or 開玲瓏翻法三乘方.



正負開三乘方圖

術曰商常為正　實常為負　從常為正　益常為負



上廉超一位
益隅超三位
商數進一位

上廉再超一位
益隅再超三位
商數再進一位

以一為益隅，開玲瓏翻法三乘方

												商
—	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	實
											0	虛方
						7	6	3	2	0	0	從上廉
											0	虛下廉
										—	1	益隅

步法,乃以從廉超一位,益隅超三位,約商得十,今再超進,乃商置百。其從上廉為七十六億三千二百萬,其益隅為一億,

			億						百	十	個	商	
—	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	負實	
									0			虛方	$x10^2$
	+	7	6	3	2	0	0					從上廉	$x10^4$
					0							虛下廉	$x10^6$
		—	1									益隅	$x10^8$

億 $(100)^4$
(商百位)

萬 $(10)^4$
(商十位)

個 $(1)^4$
(商個位)

這相當於執行變換 $x = 100y$

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

$$-(100y)^4 + 763200(100y)^2 - 40642560000 = 0$$

$$-100000000y^4 + 7632000000y^2 - 40642560000 = 0$$

			億						百	十	個	商
－	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	負實
									0			虛方
	＋	7	6	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
					0							虛下廉
		－	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

約實,置商八百,為定商。

			億						8百			商
—	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	負實
									0			虛方
	+	7	6	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
					0							虛下廉
		—	1				跳8位					益隅
			億 (商百位)				萬 (商十位)				個 (商個位)	

以 商生益隅,得八億,為益下廉。又以商生下廉,得六十四億,為益上廉。

			億						8百			商
—	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	負實
									0			虛方
	＋	7	6	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
	—	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	益上廉
		—	8	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

與從上廉七十六億三千二百萬相消,從上廉余十二億三千二百萬,

			億						8百			商
—	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	負實
									0			虛方
	+	1	2	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
		—	8	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又與商相生,得九十八億 五千六百萬,為從方。

			億						8百			商
—	4	0	6	4	2	5	6	0	0	0	0	負實
	+	9	8	5	6	0	0	0	0	0	0	從方
	+	1	2	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
		—	8	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又與商相生,得七百八十八億四千八百萬,為正積。與元實四百六億四千二百五十六萬相消,正積余三百八十二億五百四十四萬,為正實。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	+	9	8	5	6	0	0	0	0	0	0	從方
	+	1	2	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
		−	8	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		−	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又 以益隅一億,與商相生,得八億增入益下廉,為十六億,又以益下廉與商相生,得一百二十八億,為益上廉。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	+	9	8	5	6	0	0	0	0	0	0	從方
	+	1	2	3	2	0	0	0	0	0	0	從上廉
—	1	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	益上廉
	—	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

乃以益上廉與從上廉一十二億三千二百萬相消,余一百 一十五億六千八百萬,為益上廉。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	+	9	8	5	6	0	0	0	0	0	0	從方
−	1	1	5	6	8	0	0	0	0	0	0	益上廉
	−	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		−	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又與商相生,得九百二十五億四千四百萬,為益方。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	+	9	8	5	6	0	0	0	0	0	0	從方
—	9	2	5	4	4	0	0	0	0	0	0	益方
—	1	1	5	6	8	0	0	0	0	0	0	益上廉
	—	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

與從方九十八億五千六百萬相消,益方余八百二十六億八千八百萬,為益方。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	0	益方
—	1	1	5	6	8	0	0	0	0	0	0	益上廉
	—	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又以商生益隅一億,得八億。增入益下廉得二十四億。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	0	益方
—	1	1	5	6	8	0	0	0	0	0	0	益上廉
	—	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又以商相生,得一百九十二億。入益上廉,得三百七億六千八百萬為益上廉。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	0	益方
—	3	0	7	6	8	0	0	0	0	0	0	益上廉
	—	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

又以商生益隅一億,得八億,入益下廉,得三十二億畢。

			億						8百			商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	0	益方
—	3	0	7	6	8	0	0	0	0	0	0	益上廉
	—	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	益下廉
		—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	益隅

- 以 商生益隅,得八億,為益下廉。 又以商生下廉,得六十四億,為益上廉。
- 與從上廉七十六億三千二百萬相消,從上廉余十二億三千二百萬,
- 又與商相生,得九十八億 五千六百萬,為從方。
- 又與商相生,得七百八十八億四千八百萬,為正積。與元實四百六億四千二百五十六萬相消,正積余三百八十二億五百四十四萬,為正實。
- 又 以益隅一億,與商相生,得八億增入益下廉,為十六億,又以益下廉與商相生,得一百二十八億,為益上廉。
- 乃以益上廉與從上廉一十二億三千二百萬相消,余一百 一十五億六千八百萬,為益上廉。
- 又與商相生,得九百二十五億四千四百萬,為益方。
- 與從方九十八億五千六百萬相消,益方余八百二十六億八千八百萬,為益方。
- 又以商生益隅一億,得八億。增入益下廉得二十四億。
- 又以商相生,得一百九十二億。 入益上廉,得三百七億六千八百萬為益上廉。
- 又以商生益隅一億,得八億,入益下廉,得三十二億畢。

所有上述這些相當於執行變換

$$z = y - 8$$

$$z = y - 8$$

$$-100000000y^4 + 7632000000y^2 - 40642560000 = 0$$

$$(z+8)^4 = z^4 + 4z^3 \times 8 + 6z^2 \times 8^2 + 4z \times 8^3 + 8^4$$

$$= z^4 + 32z^3 + 384z^2 + 2048z + 4096$$

$$(z+8)^2 = z^2 + 2 \times z \times 8 + 8^2 = z^2 + 16z + 64$$

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

$$a_4 = -100000000$$

$$a_3 = -3200000000$$

$$a_2 = -38400000000 + 7632000000 = -30768000000$$

$$a_1 = -204800000000 + 7632000000 \times 16 = -82688000000$$

$$a_0 = -40642560000 - 409600000000 + 7632000000 \times 64$$

$$= 38205440000$$

$$a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$$

	商
$a_0 = 38205440000$	實
$a_1= -82688000000$	方
$a_2= -30768000000$	上廉
$a_3= -\ 3200000000$	下廉
$a_4= -\ 100000000$	隅

其益方一退,為八十二億六千八百八十萬,益上廉再退,得三億七百六十八萬,益下廉三退,得三百二十萬,益隅四退,為一萬畢。

			億						8百			商
＋	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	益方
		—	3	0	7	6	8	0	0	0	0	益上廉
				—	3	2	0	0	0	0	0	益下廉
						—	1	0	0	0	0	益隅

退4位

- 其益方一退,為八十二億六千八百八十萬,益上廉再退,得三億七百六十八萬,益下廉三退,得三百二十萬,益隅四退,為一萬畢。

相當於執行變換

$$w= 10z$$

$a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$

$a_4=-\ 100000000$

$a_3=-\ 3200000000$

$a_2=-30768000000$

$a_1=-82688000000$

$a_0=\ 38205440000$

$w^4=(10z)^4=10000z^4$

$w^3=(10z)^3=1000z^3$

$w^2=(10z)^2=100z^2$

$w=(10z)^1=10z$

$b_4w^4+b_3w^3+b_2w^2+b_1w+w_0=0$

$b_4=-\ 10000$

$b_3=-\ 3200000$

$b_2=-307680000$

$b_1=-8268800000$

$b_0=\ 38205440000$

$$b_4w^4+b_3w^3+b_2w^2+b_1w+b_0=0$$

	商
$b_0 = 38205440000$	實
$b_1 = -8268800000$	方
$b_2 = -307680000$	上廉
$b_3 = -3200000$	下廉
$b_4 = -10000$	隅

乃約正實,續置商四十步。

			億						8百	4十		商
＋	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	益方
		—	3	0	7	6	8	0	0	0	0	益上廉
				—	3	2	0	0	0	0	0	益下廉
						—	1	0	0	0	0	益隅

與益隅一萬相生,得四萬,入益下廉為三百二十四萬。

			億						8百	4十		商
＋	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	—	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	益方
		—	3	0	7	6	8	0	0	0	0	益上廉
				—	3	2	4	0	0	0	0	益下廉
						—	1	0	0	0	0	益隅

又與商相生,得一千二百九十六萬。入益上廉內,為三億二千六十四萬。

			億						8百	4十		商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	−	8	2	6	8	8	0	0	0	0	0	益方
		−	3	2	0	6	4	0	0	0	0	益上廉
				−	3	2	4	0	0	0	0	益下廉
						−	1	0	0	0	0	益隅

又與商相生,得一十二億八千二百五十六萬。入益(原書“益”誤為“從”)方內,為九十五億五千一百三十六萬。

			億						8百	$\boxed{4十}$		商
+	3	8	2	0	5	4	4	0	0	0	0	正實
	—	9	5	5	1	3	6	0	0	0	0	益方
		—	3	2	0	6	4	0	0	0	0	益上廉
				—	3	2	4	0	0	0	0	益下廉
						—	1	0	0	0	0	益隅

乃命上續商四十,除實適盡。

（9551360000×4＝38205440000）

益方　商　　實

			億						8百	4十	0	商
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	正實
	—	9	5	5	1	3	6	0	0	0	0	益方
		—	3	2	0	6	4	0	0	0	0	益上廉
				—	3	2	4	0	0	0	0	益下廉
						—	1	0	0	0	0	益隅

除實適盡, thus, w=4.

- $y = x/100$
- $z = y - 8$
- $w = 10z$

Therefore,

$$x = 100(8 + \frac{4}{10}) = 840$$

The Ruffini–Horner method

- Paolo Ruffini (1765–1822)
- William Horner (1786–1837)
- 北宋數學家賈憲(ca.1010–ca.1070)

- Let f be a function and let n be an integer.
- If $f(x)$ has a root in the interval $[n, n + 1)$, then $f(x + n)$ has a corresponding root in $[0, 1)$. We call this translation by n.

- If $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ is a polynomial of degree d with integer coefficients, then $10^d p(\frac{x}{10}) = \sum_{i=0}^{d} a_i 10^{d-i} x^i$ is also a polynomial of degree d with integer coefficients.
- If $p(x)$ is a polynomial of degree d and has a root in [0, 1), then $10^d p(\frac{x}{10})$ has a corresponding root in [0, 10). We call this dilation by 10.

- Thus, given a polynomial with a root *m* in [*n*, *n* + 1), translating by n and dilating by 10 produces a related polynomial with a root in [0, 10).
- Moreover,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = ((.....((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ... + a_2)x + a_1)x + a_0$$

Synthetic Division

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = ((.....((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ... + a_2)x + a_1)x + a_0$$

To evaluate *p(b) we multiply* a_n *by b, add* a_{n-1}*, multiply by b, add* a_{n-2}*, and* so forth.

b	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…………	a_0
		a_nb	$a_nb^2+a_{n-1}b$	…………	$a_nb^n+.....+a_1b$
	a_n	a_nb+a_{n-1}	$a_nb^2+a_{n-1}b+a_{n-2}$	…………	$a_nb^n+.....+a_1b+a_0$

Example: Consider F(2), where F(x) = $x^3 + 2x^2 + 3x - 24$

2	**1**	**2**	**3**	**-24**
		2	8	22
	1	4	11	**-2**

Thus, *F(2)* = *-2.*

translation by n

Example: Again, consider $F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 24$

2	**1**	**2**	**3**	**-24**
		2	8	22
	1	4	11	**-2**
		2	12	
	1	6	**23**	
		2		
	1	**8**		

translating $F(x)$ *by 2, we have* $x^3 + 8x^2 + 23x - 2$

$$
\begin{aligned}
F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 24 &= (x-2)(x^2 + 4x+11) - 2 \\
&= (x-2)[(x-2)(x+6)+23] - 2 \\
&= (x-2)[(x-2)[(x-2)+8]+23] - 2
\end{aligned}
$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 24 = (x-2)(x^2 + 4x+11) - 2$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad\quad x^2 + 4x + 11 \\
\hline
x - 2 & x^3 + 2x^2 + 3x - 24 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & \quad\quad 4x^2 + 3x - 24 \\
 & \quad\quad 4x^2 - 8x \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad 11x - 24 \\
 & \quad\quad\quad\quad 11x - 22 \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad - 2
\end{array}
$$

$$x^2 + 4x + 11 = (x-2)(x+6)+23$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x + 6 \\
\hline
x - 2 & x^2 + 4x + 11 \\
 & x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
 & \quad 6x + 11 \\
 & \quad 6x - 12 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 23
\end{array}$$

$$x + 6 = (x-2)+8$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
\hline
x - 2 & x + 6 \\
 & x - 2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 8
\end{array}$$

dilation by 10

Example: Again, consider $F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 24$

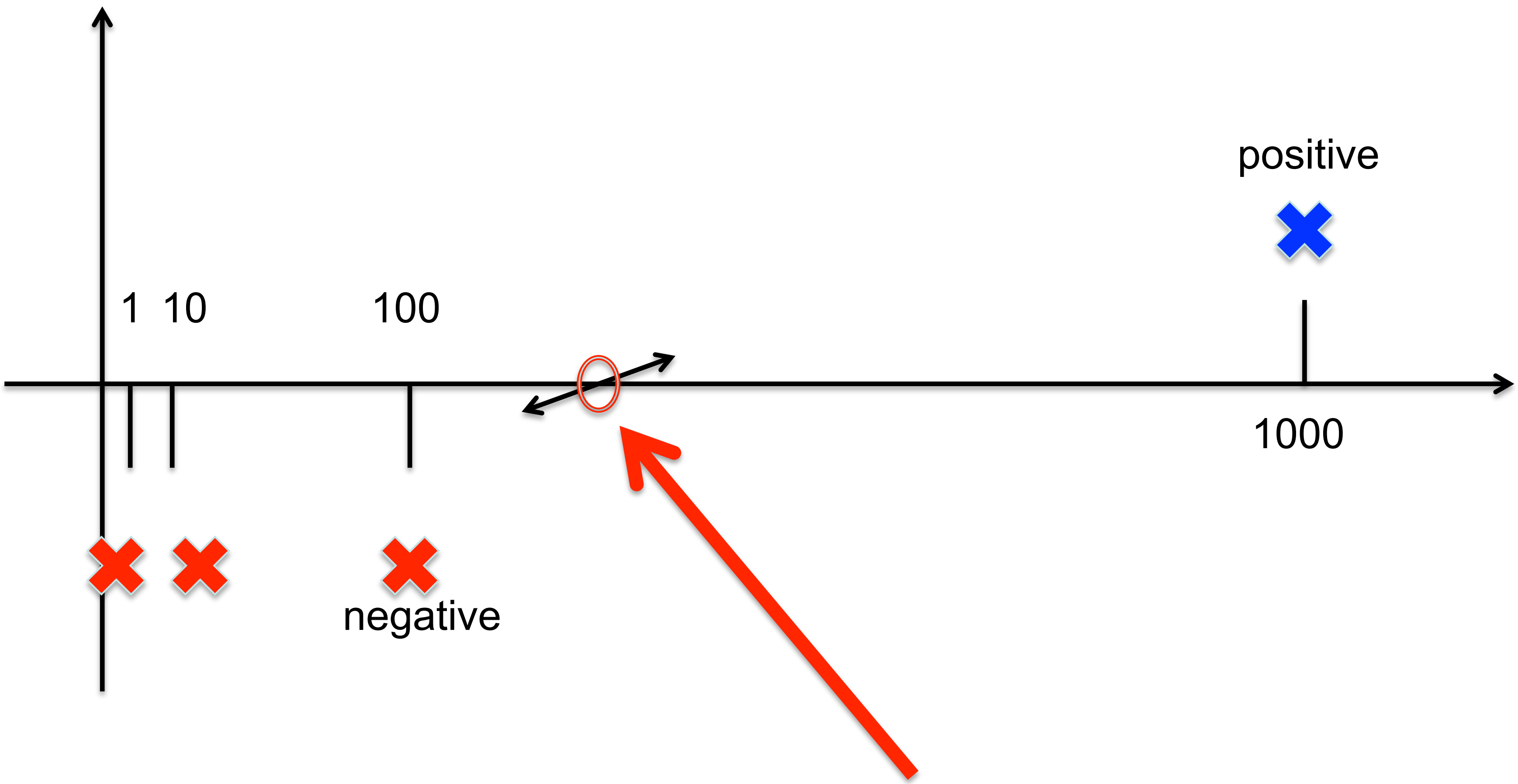
	1	**2**	**3**	**-24**
Dilation by 10				
	1	20	300	-24000

Example

$$x^3 + 3x^2 + 5x - 1906869 = 0$$

Example $x^3 + 3x^2 + 5x - 1906869 = 0$

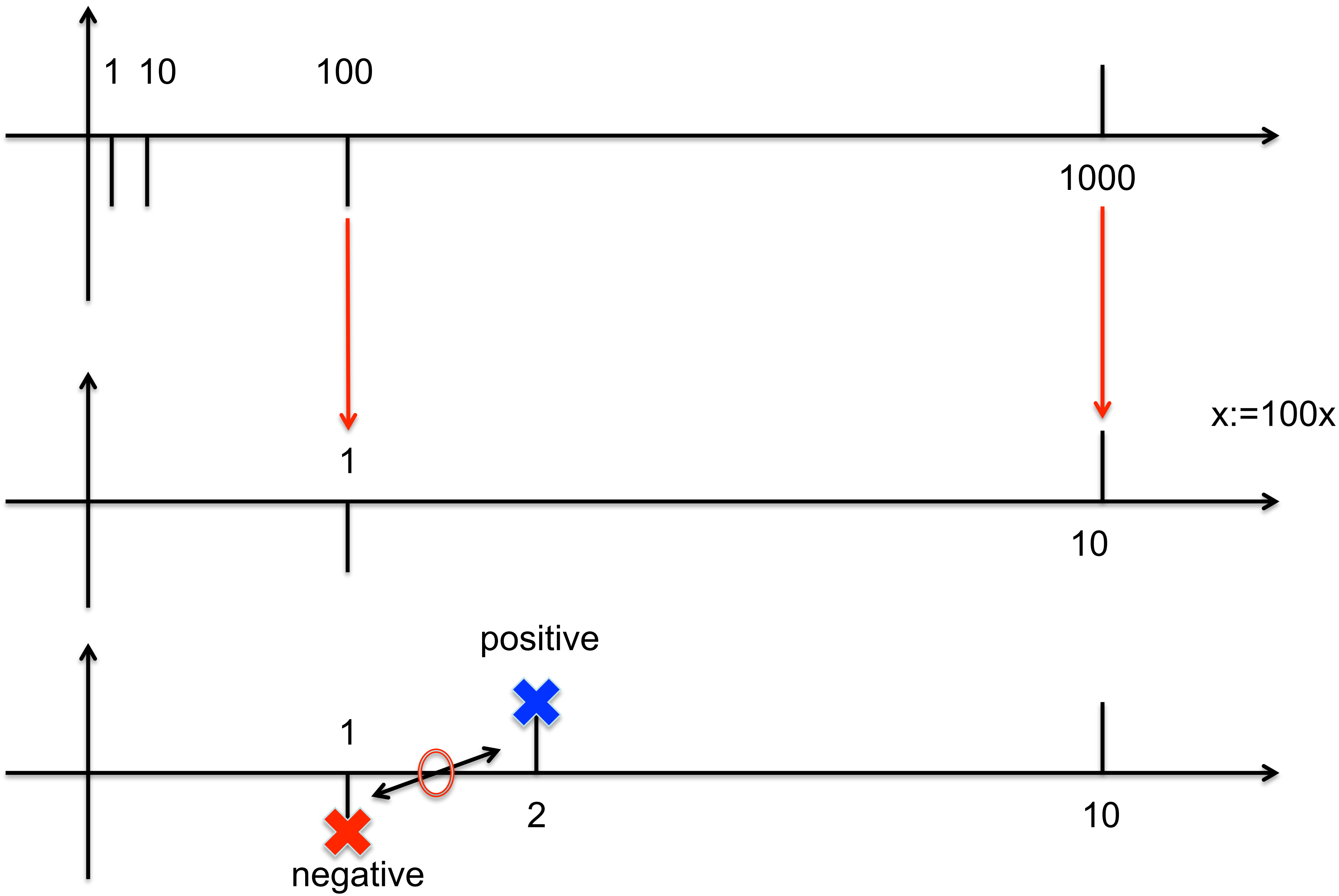
	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	1	3	5	-1906869	
		1	4	9	
	1	4	9	-1906860	negative
10	1	3	5	-1906869	
		10	130	1350	
	1	13	135	-1905519	negative
100	1	3	5	-1906869	
		100	10300	1030500	
	1	103	10305	-876369	negative
1000	1	3	5	-1906869	
		1000	1003000	1003005000	
	1	1003	1003005	1001098131	**Positive !!!**



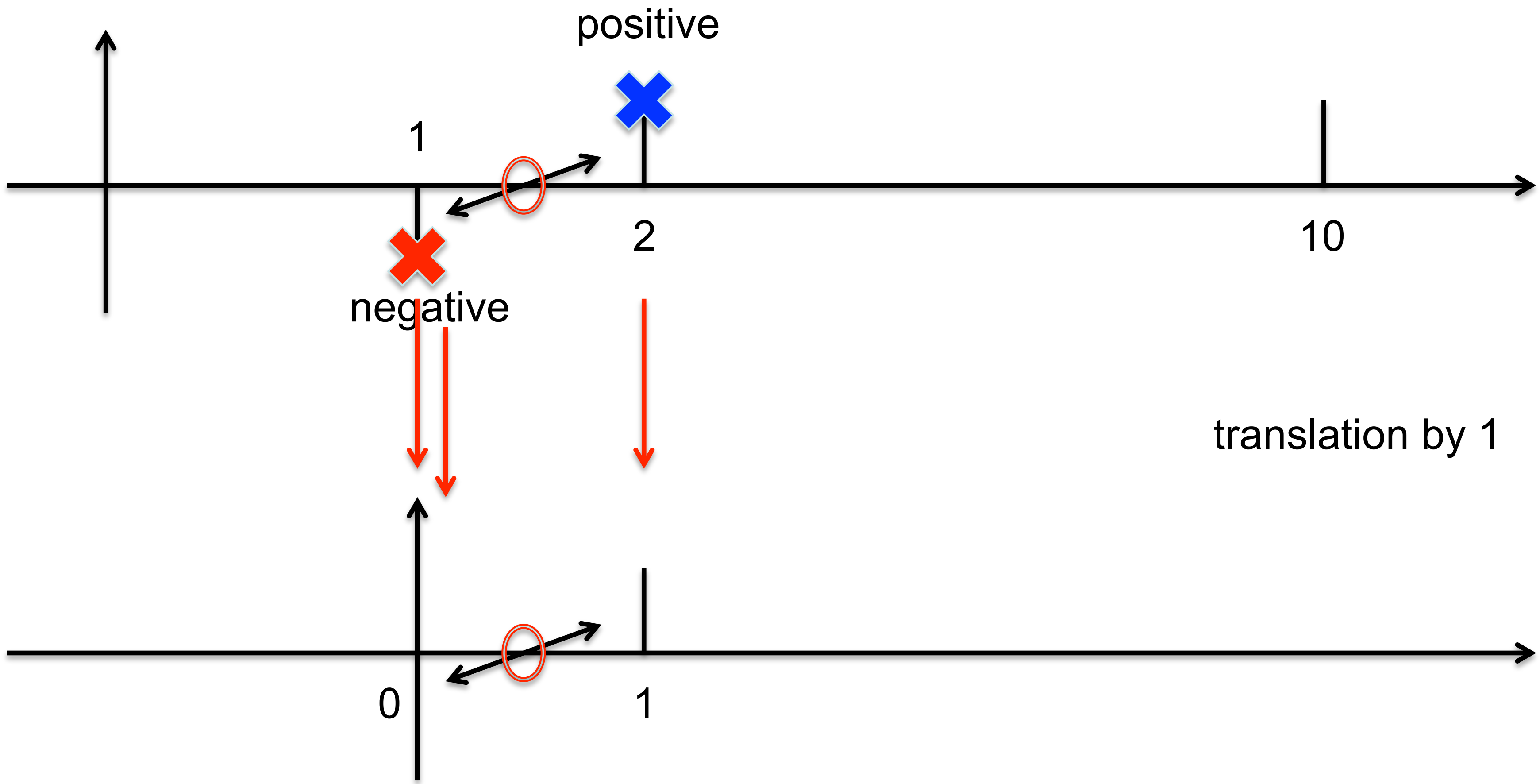
The graph of the polynomial must be intersecting the x-axis somewhere between 100 and 1000, thus

There must be a root somewhere between 100 and 1000

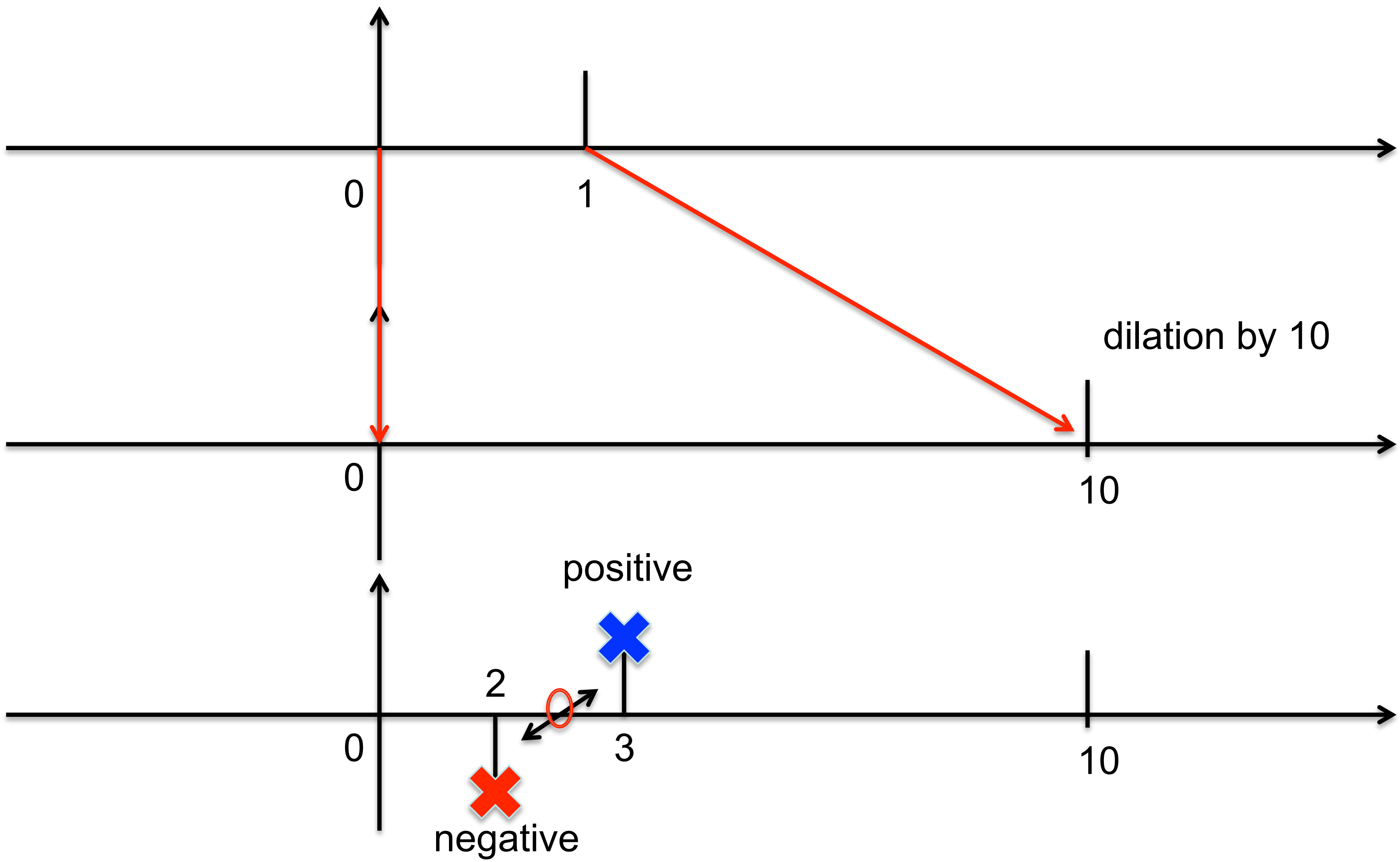
	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	3	5	-1906869	
$x:=100x$	**1000000**	**30000**	**500**	**-1906869**	
1	1000000	30000	500	-1906869	
		1000000	1030000	1030500	
	1000000	1030000	1030500	-876369	negative
2	1000000	30000	500	-1906869	
		2000000	4060000	8121000	
	1000000	2030000	4060500	6214131	**positive!!!**


1 10
100
1000
1
10
x:=100x
positive
1
2
10
negative

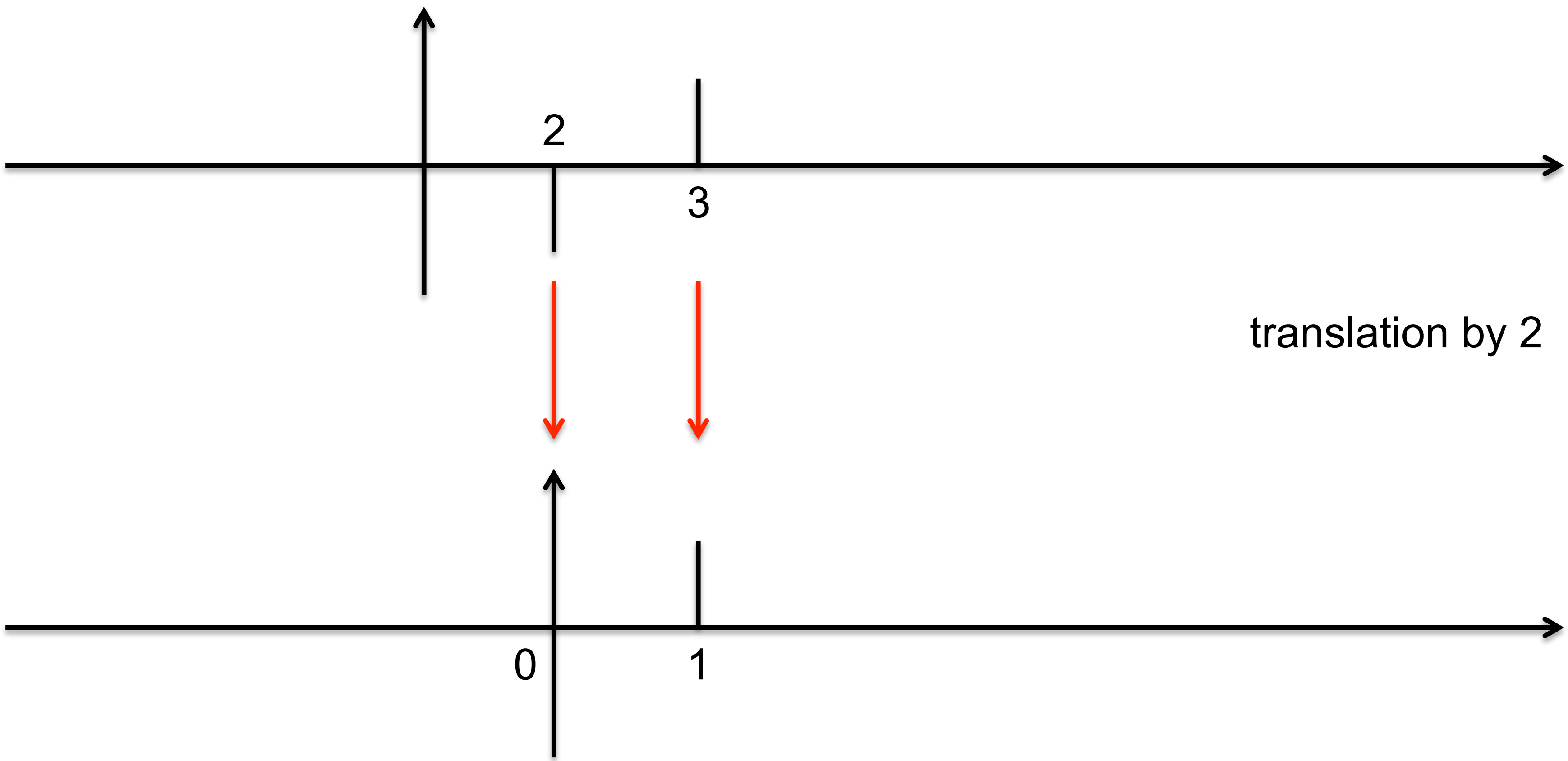
	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1000000	30000	500	-1906869	
1	1000000	30000	500	-1906869	
		1000000	1030000	1030500	
	1000000	1030000	1030500	**-876369**	
		1000000	2030000		
	1000000	2030000	**3060500**		
		1000000			
	1000000	**3030000**			
	1000000	**3030000**	**3060500**	**-876369**	


positive
1
2
10
negative
translation by 1
0
1

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1000000	3030000	3060500	-876369	
dilation	**1000000**	**30300000**	**306050000**	**-876369000**	
1	1000000	30300000	306050000	-876369000	
		1000000	31300000	337350000	
	1000000	31300000	337350000	-539019000	negative
2	1000000	30300000	306050000	-876369000	
		2000000	64600000	741300000	
	1000000	32300000	370650000	-135069000	negative
3	1000000	30300000	306050000	-876369000	
		3000000	99900000	1217850000	
	1000000	33300000	405950000	341481000	**positive!!!**

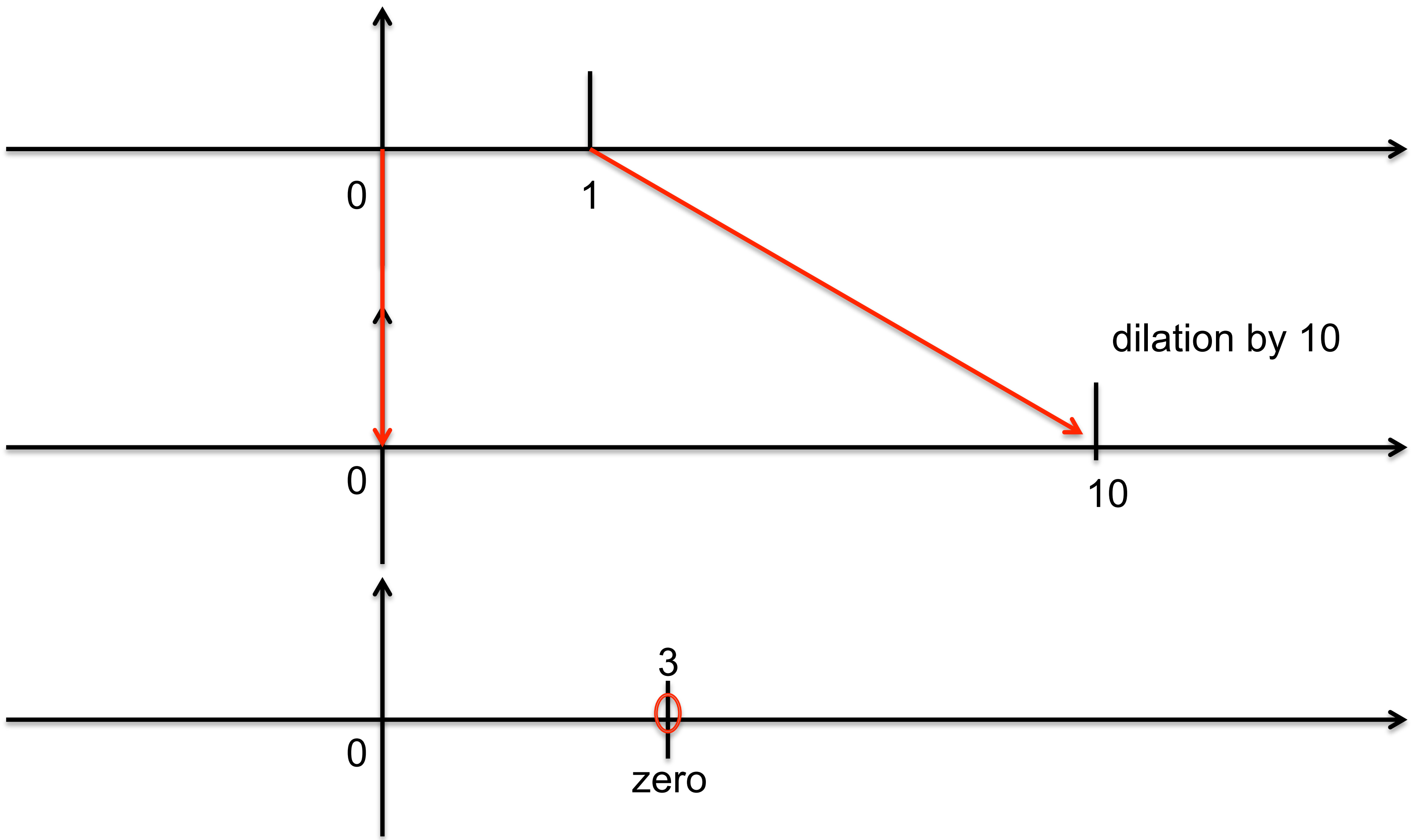

0
1
dilation by 10
0
10
positive
2
0
3
10
negative

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1000000	30300000	306050000	-876369000	
2	1000000	30300000	306050000	-876369000	
		2000000	64600000	741300000	
	1000000	32300000	370650000	**-135069000**	
		2000000	68600000		
	1000000	34300000	**439250000**		
		2000000			
	1000000	**36300000**			
	1000000	**36300000**	**439250000**	**-135069000**	


2
3
translation by 2
0
1

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1000000	36300000	439250000	-135069000	
dilation	1000000	363000000	43925000000	-135069000000	
2	1000000	363000000	43925000000	-135069000000	
		2000000	730000000	89310000000	
	1000000	365000000	44655000000	-45759000000	negative
3	1000000	363000000	43925000000	-135069000000	
		3000000	1098000000	135069000000	
	1000000	366000000	45023000000	0	**Zero!!!**

Thus, numerical solution to $x^3 + 3x^2 + 5x - 1906869 = 0$ is **x=123**.


0
1
dilation by 10
0
10
3
0
zero