AMA1D01C　Lecture Notes Set #03

《海島算經》

《The Sea Island Mathematical Manual 》

By

李向榮博士　梁信謙博士

香港理工大學應用數學系

- 劉徽為《九章算術》作注，名為《九章算術注》。其中，劉徽對《九章算術》中最後的第九章《勾股》內的「重差術」作補充解釋而提出了幾個問題，這些問題被編在第九章之後，成為了《九章算術注》的第十章「重差」。
- 唐代初年，「重差」被抽出來獨立成書，取名《海島算經》（現存流行的版本有九問）。
- 可惜劉徽的原圖與注釋均已遺失。
- 《九章重差圖》？？

- 南北朝祖沖之為《九章重差圖》作注。
- 唐高宗顯慶元年(656年)數學家李淳風等注釋《算經十書》，作為國子監學習和考試用書,《海島算經》列入《算經十書》之一，規定《海島算經》的學習期限為三年，是其他算經學習期限的三倍。
- 南宋秦九韶研究過類似《海島算經》的測量書題目。
- 南宋數學家楊輝《續古摘奇演算法》討論了四種測量問題,包括來自《海島算經》海島題。
- 清代李潢 (1746-1812)著《海島算經細草圖說》。沈欽裴著《重差圖說》。李鏐著《海島算經緯筆》。

- 北宋元豐七年(1084年)和南宋甯宗嘉定六年(1213年)先後刻印兩次。但宋刻本《海島算經》後來遺失。
- 明永樂年間收入《永樂大典》，但只存劉徽文字和李淳風注，原劉徽圖和原劉徽所作的注釋不存。
- 清乾隆時代，經學家戴震將《海島算經》文字，從《永樂大典》中輯錄出來收入《四庫全書》。

欽定四庫全書

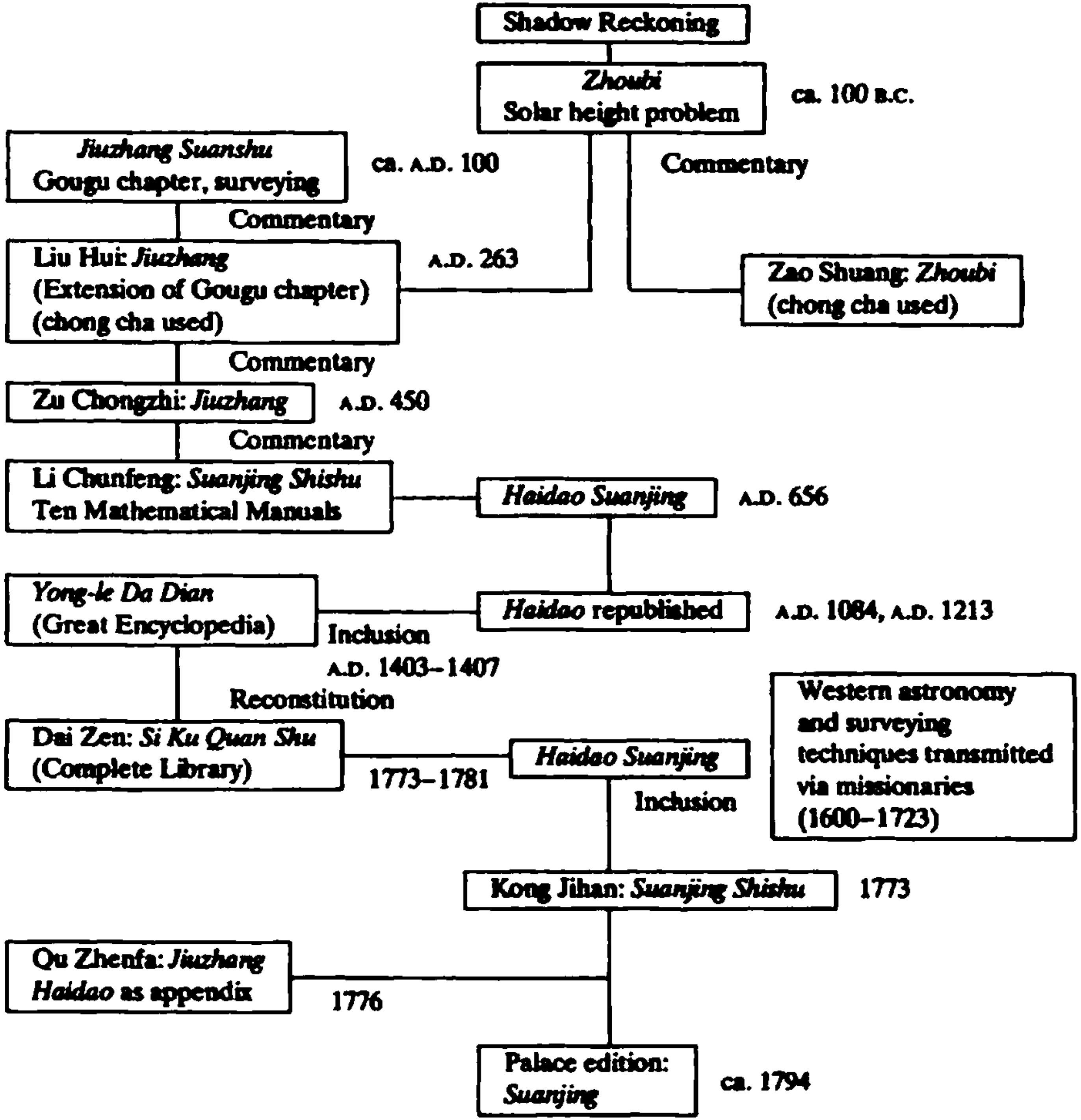
海島算經

晉 劉徽 撰

唐 李淳風 注

今有望海島立兩表齊高三丈前後相去千步令後表與前表參相直從前表卻行一百二十三步人目著地取望島峯與表末參合從後表卻行一百二十七步人目著地取望島峯亦與表末參合問島高及去表各幾何荅曰島高四里五十五步去表一百二里一百五十

- 在唐代傳入朝鮮、日本。
- 19世紀來華傳教士偉烈亞力。他1852年在《北華捷報》(North China Herald，〔《字林西報》前身〕發表的論文:《中國數學科學劄記》(Jottings on the Sciences of Chinese Mathematics)。偉烈亞力在文仲介紹了《海島算經》，說此書是“一部關於實用三角學的九個問題”。
- 1913年日本數學史家三上義夫在其英文著作《中國與日本數學的發展》中譯出頭三則問題，Mikami， Yoshio:The Development of Mathematics in China and Japan 1913。
- 1932，法國人L. van. Hee 翻譯《海島》成法文，《*Le Classique d I ‘Ile Maritime: Ouvrage Chinois de III* siecle》。
- 1986年澳大利亞華人數學家洪天賜和美國數學家弗蘭克·斯委特茲將《海島算經》全文翻譯成英文。此外還有日文翻譯本和俄文翻譯本。



Shadow Reckoning
Zhoubi
Solar height problem
ca. 100 B.C.
Commentary
Jiuzhang Suanshu
Gougu chapter, surveying
ca. A.D. 100
Commentary
Liu Hui: *Jiuzhang*
(Extension of Gougu chapter)
(chong cha used)
A.D. 263
Zao Shuang: *Zhoubi*
(chong cha used)
Commentary
Zu Chongzhi: *Jiuzhang*
A.D. 450
Commentary
Li Chunfeng: *Suanjing Shishu*
Ten Mathematical Manuals
Haidao Suanjing
A.D. 656
Yong-le Da Dian
(Great Encyclopedia)
Haidao republished
A.D. 1084, A.D. 1213
Inclusion
A.D. 1403–1407
Reconstitution
Western astronomy
and surveying
techniques transmitted
via missionaries
(1600–1723)
Dai Zen: *Si Ku Quan Shu*
(Complete Library)
Haidao Suanjing
1773–1781
Inclusion
Kong Jihan: *Suanjing Shishu*
1773
Qu Zhenfa: *Jiuzhang*
Haidao as appendix
1776
Palace edition:
Suanjing
ca. 1794

參考資料

- 李潢《海島算經細草圖說》

- 吳文俊主編 《中國數學大系》第三卷

- Frank J. Swetz, *The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China*, The Pennsylvania State University Press, 1992.

海島算經細草圖說

海島算經細草圖說

魏 劉 徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋

鍾祥李 潢雲門譔

今有望海島立兩表齊高三丈前後相去千步令後表與前表參相直從前表卻行一百二十三步人目著地取望島峯與表末參合從後表卻行一百二十七步人目着地取望島峯亦與表末參合問島高及去表各幾何

荅曰島高四里五十五步

国家“八五”重点
图书规划项目

吴文俊 主编

北京师范大学出版社

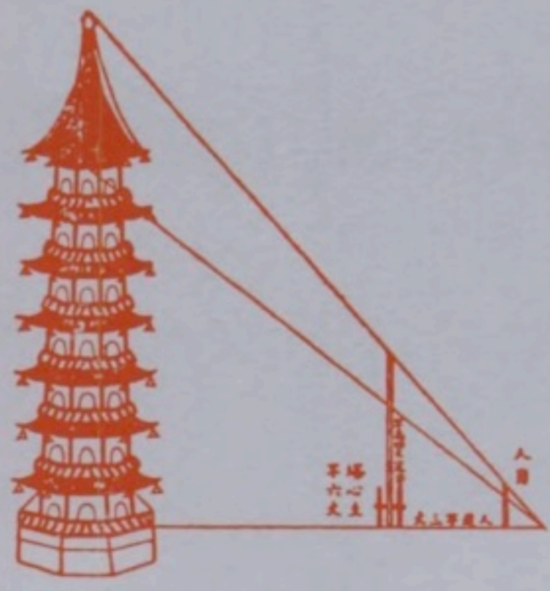
ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI

中国数学史大系

第三卷 东汉三国

THE SEA ISLAND MATHEMATICAL MANUAL: SURVEYING AND MATHEMATICS IN ANCIENT CHINA

FRANK J. SWETZ



Metrology used in 《海島》

要看懂《海島》，必先要明白其度量衡（計量 / 單位）：

1 里 ＝ 1800 尺

後世實際長度歷代不同，傳到日本、朝鮮半島、越南後也有變化，但均約為 500 米，至近代稱作華里以和英里區別。

1 丈 ＝ 10 尺

1 步 ＝ 6 尺

1 尺 ＝ 10 寸

古代中國的嘉量的尺

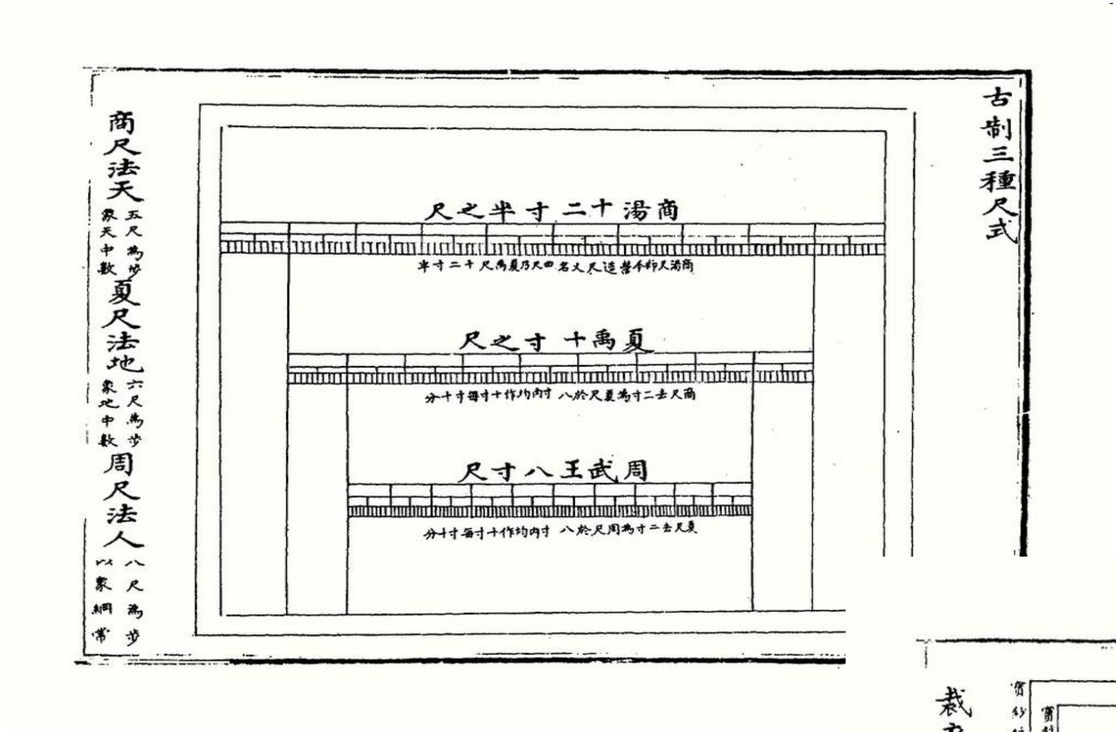
漢代尺約23.09厘米

隋代
　大尺約29.4厘米
　小尺約24.6厘米

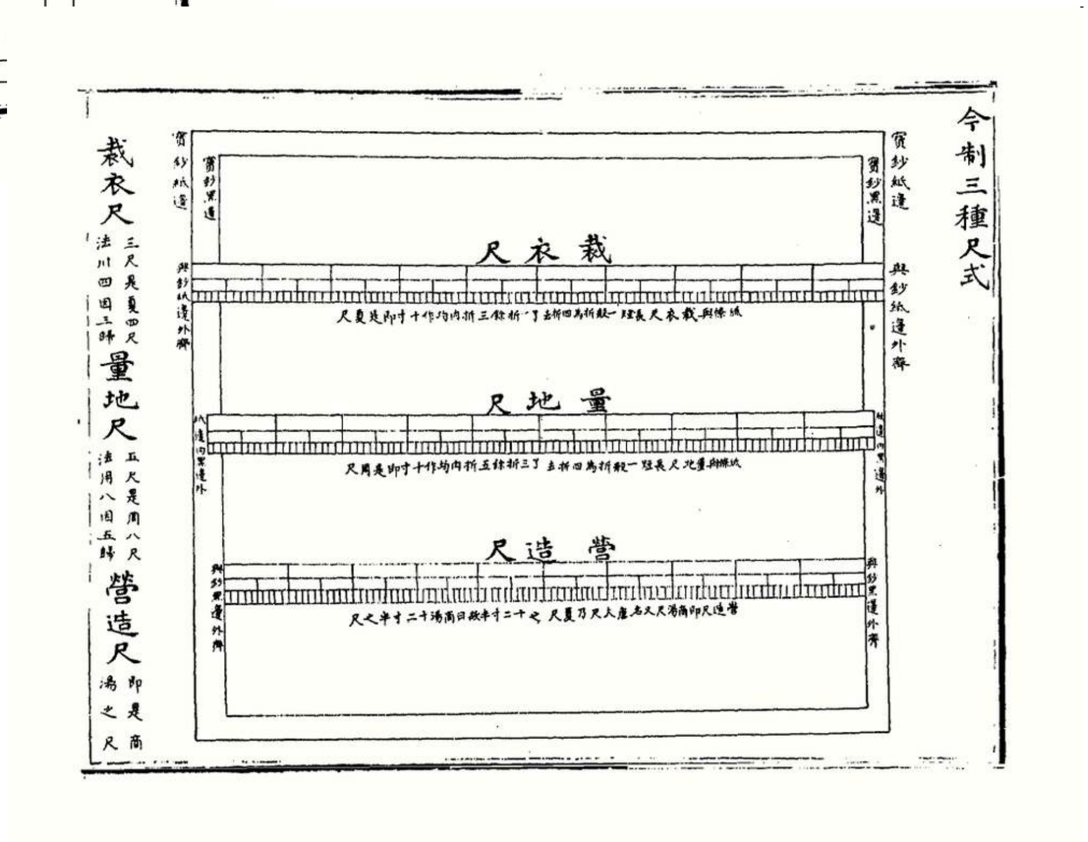
唐代
　大尺約29.4厘米
　小尺約24.6厘米

北京故宮中的嘉量

夏商周尺

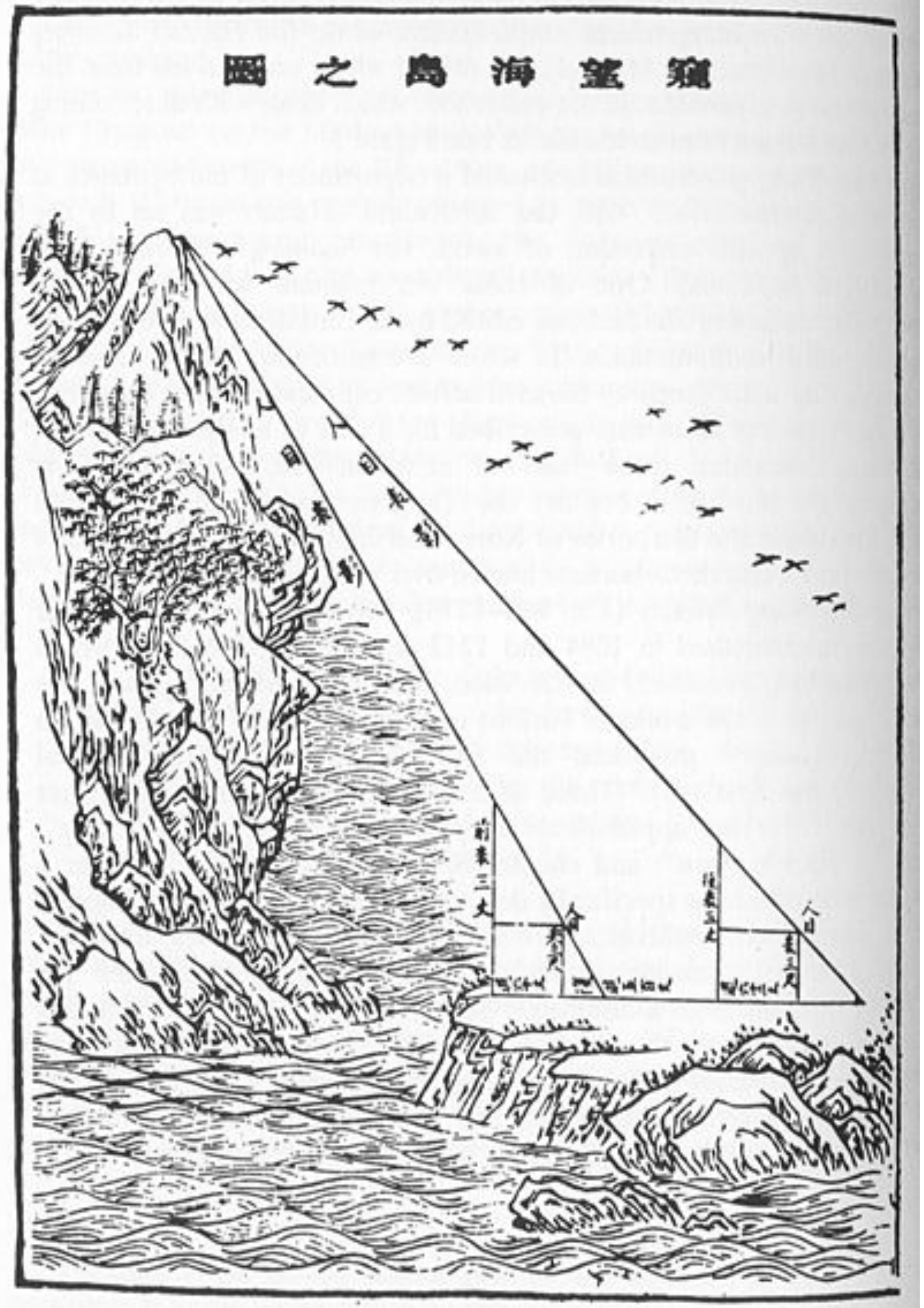


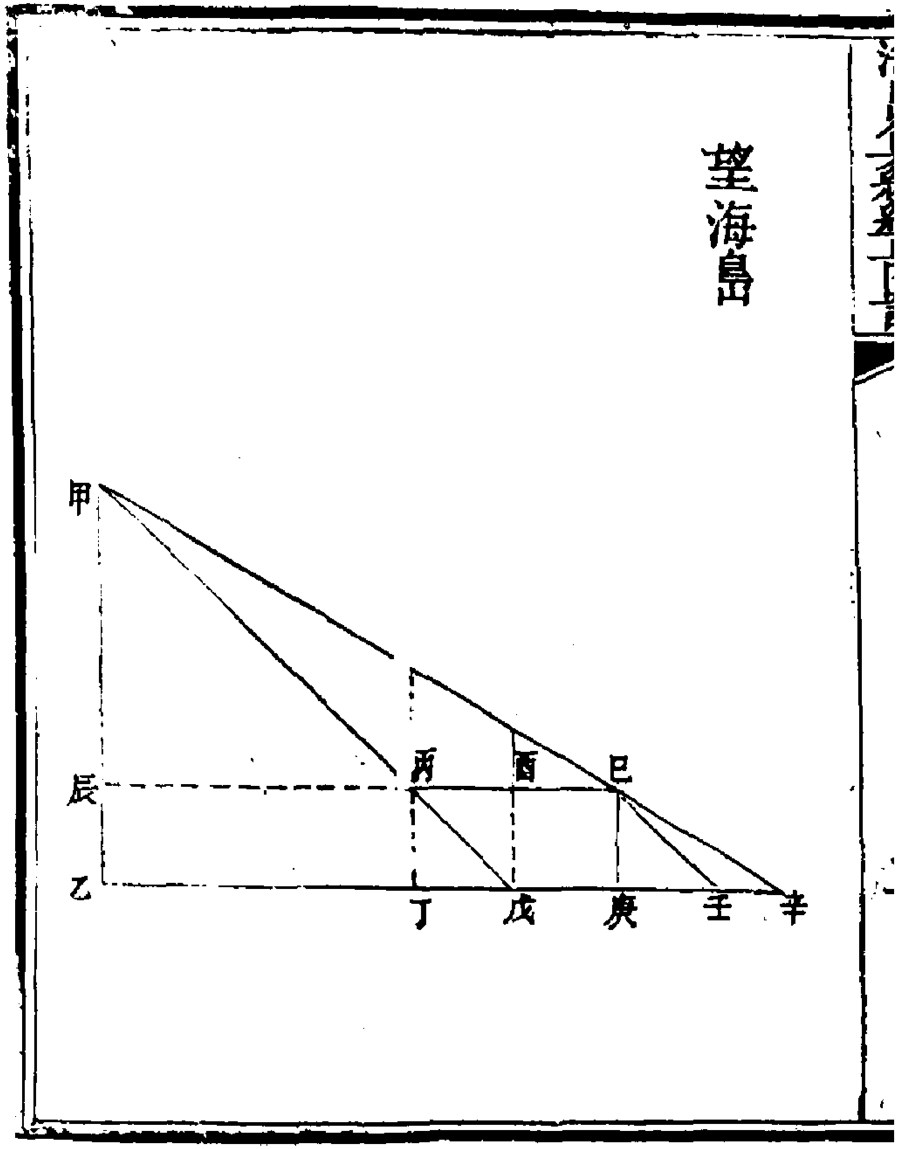
明代尺



望海島

- 今有望海島，立兩表，齊高三丈，前後相去千步，令後表與前表參相直。從前表卻行一百二十三步，人目著地取望島峯，與表末參合。從後表卻行一百二十七步，人目著地取望島峯，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？
- 答曰：島高四里五十五步；去表一百二里一百五十步。
- 術曰：以表高乘表間為實；相多為法，除之。所得加表高，即得島高。求前表去島遠近者：以前表卻行乘表間為實；相多為法。除之，得島去表數。


窺望海島之圖


望海島
甲
辰
乙
丙
酉
巳
丁
戊
庚
壬
辛

以表高乘表間為實；相多為法，除之。所得加表高，即得島高。

- 表高=三丈=3×10尺=30尺=5步。
- 表間=千步=1000步。
- 實=表高乘表間=5×1000=5000 。
- 法=相多=127步減123步＝4。
- 島高＝實÷法＋表高＝5000÷4＋5＝1255步。
- 1 里 ＝ 300步。
- 1255＝4×300＋55 。
- 島高＝四里五十五步。

求前表去島遠近者：以前表卻行乘表間為實；相多為法。除之，得島去表數。

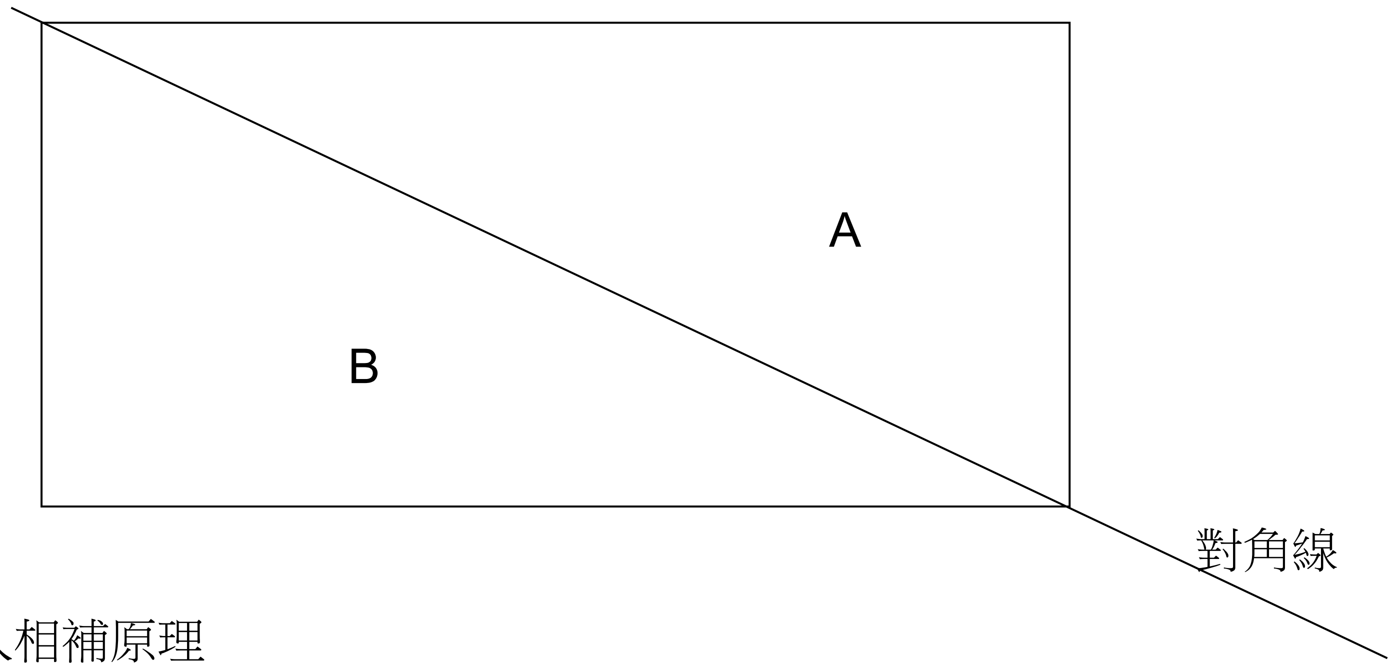
- 實=前表卻行乘表間=123步×1000步=123000 。
- 法=相多=127步減123步＝4。
- 島去表數=實÷法= 123000 ÷ 4=30750步。
- 1 里 ＝ 300步。
- 30750=102 ×300+150 。
- 島去表數=一百二里一百五十步。

未能確切知道設題造術的來龍去脈

- 可能利用得到的方法是：
  - 勾股形的「其相與之勢不失本率」
  - 出入相補原理
- 不可能利用的方法是：
  - 歐幾里得Euclidean式的工具
  - 相似三角形Similar Triangle

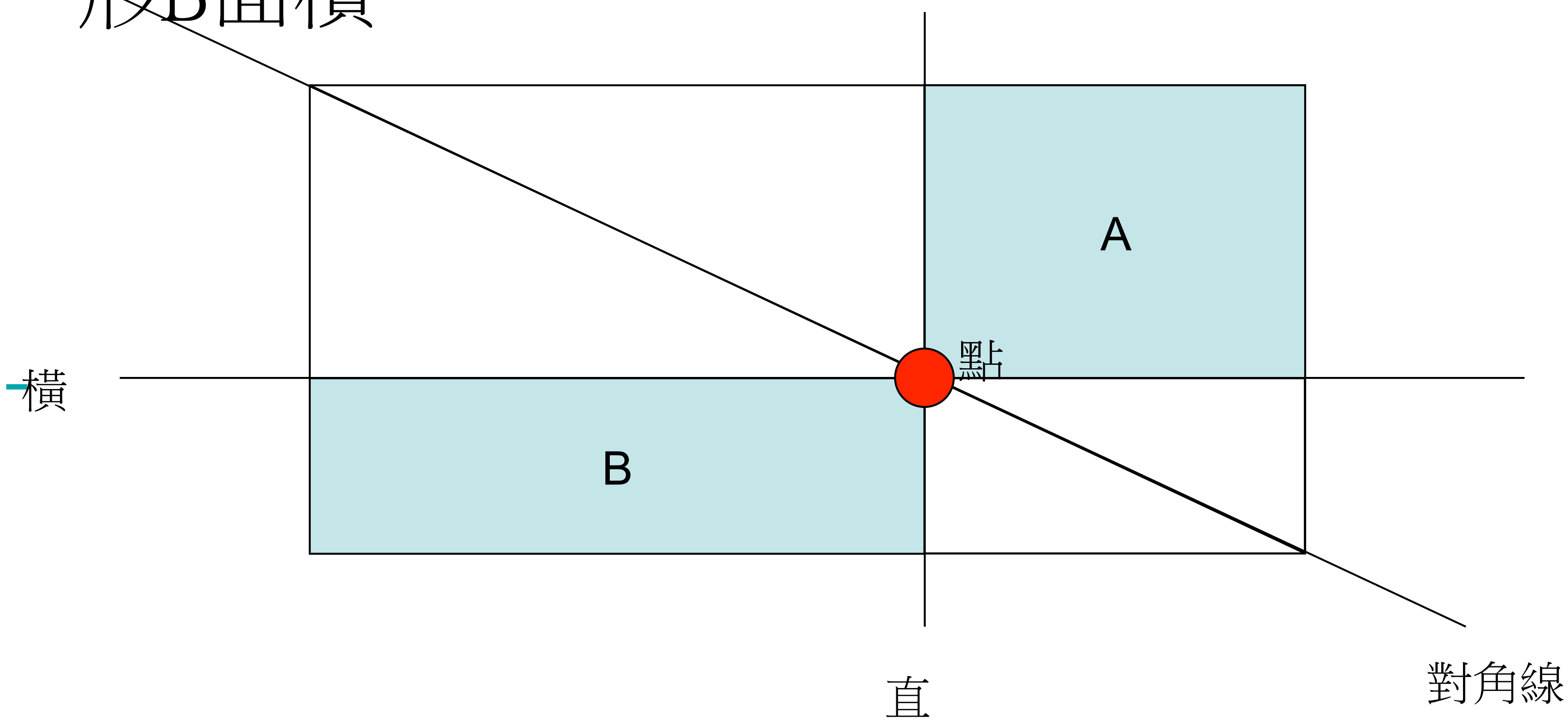
吳文俊提出以「出入相補」原理來証明「術」，而非利用現代流行的希臘數學工具，比較合乎劉徽的時代背景。

引理：在一個任意的長方形裡畫一條對角線，如圖所示。則，三角形A的面積等於三角形B的面積。

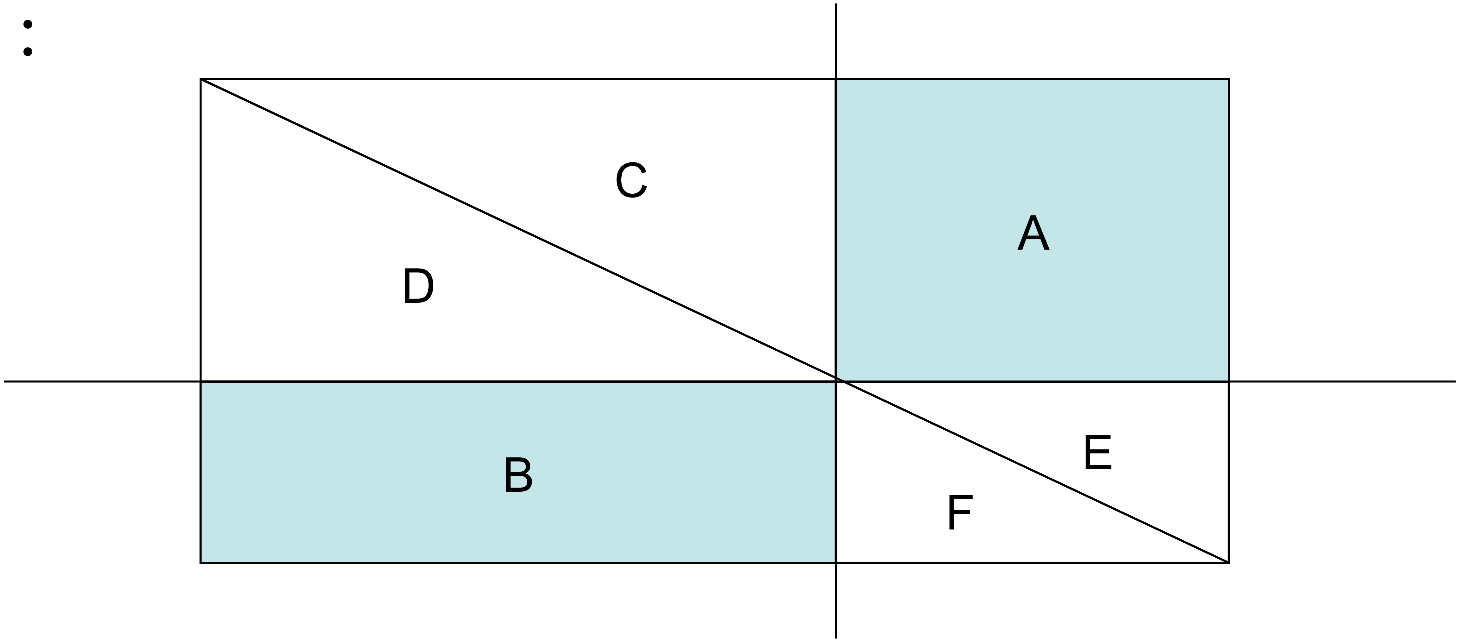


證明：出入相補原理

引理：在一個任意的長方形裡畫一條對角線，沿對角線任意一點作橫、直兩條垂直線把原長方形分成四個較小的長方形，如圖所示。則，長方形A面積＝長方形B面積。



証明：



原長方形被對角線均分為兩個面積相等的三角形：

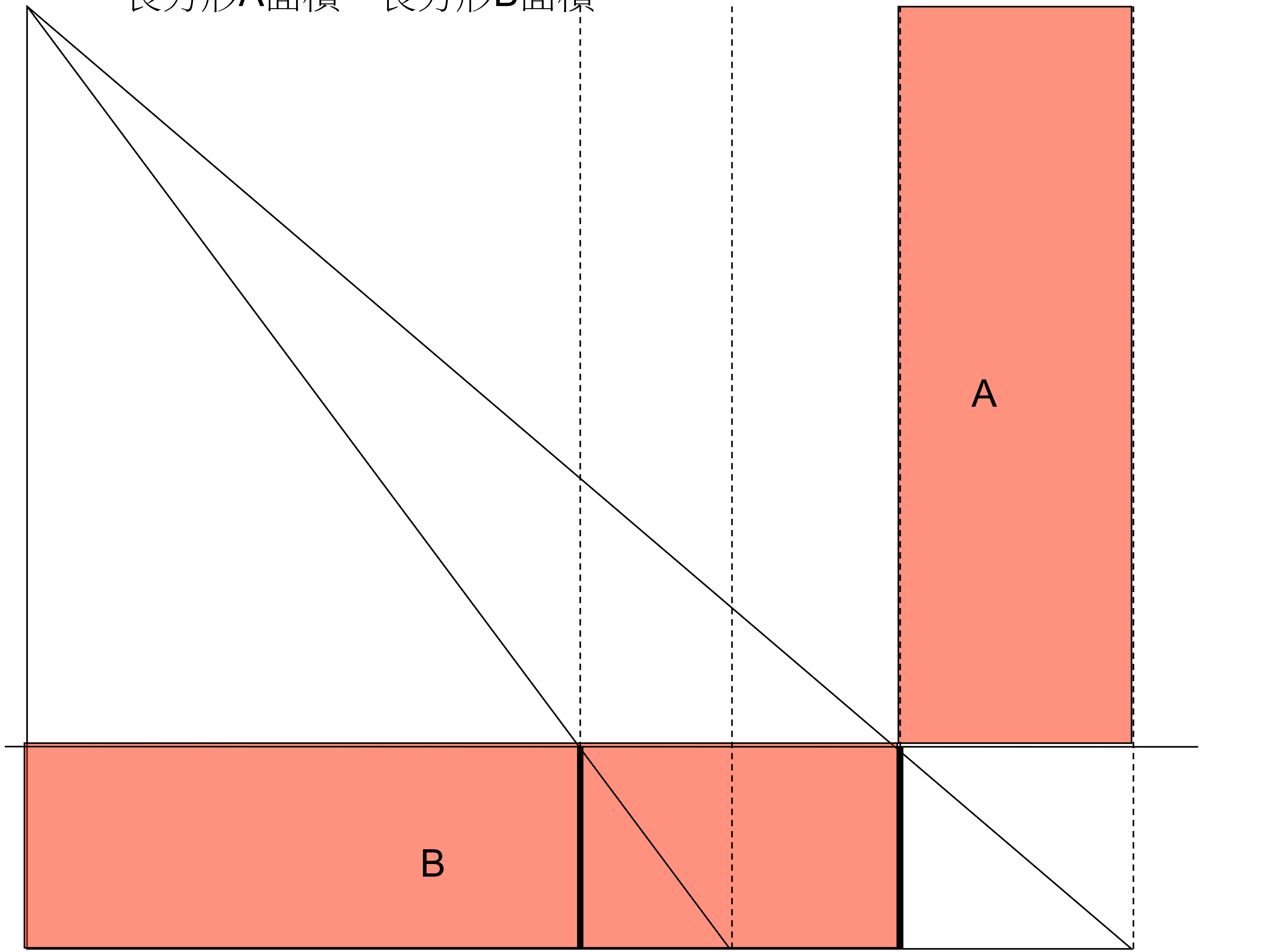
C面積＋A面積＋E面積 ＝ D面積＋B面積＋F面積。

但是，三角形C面積＝三角形D面積。

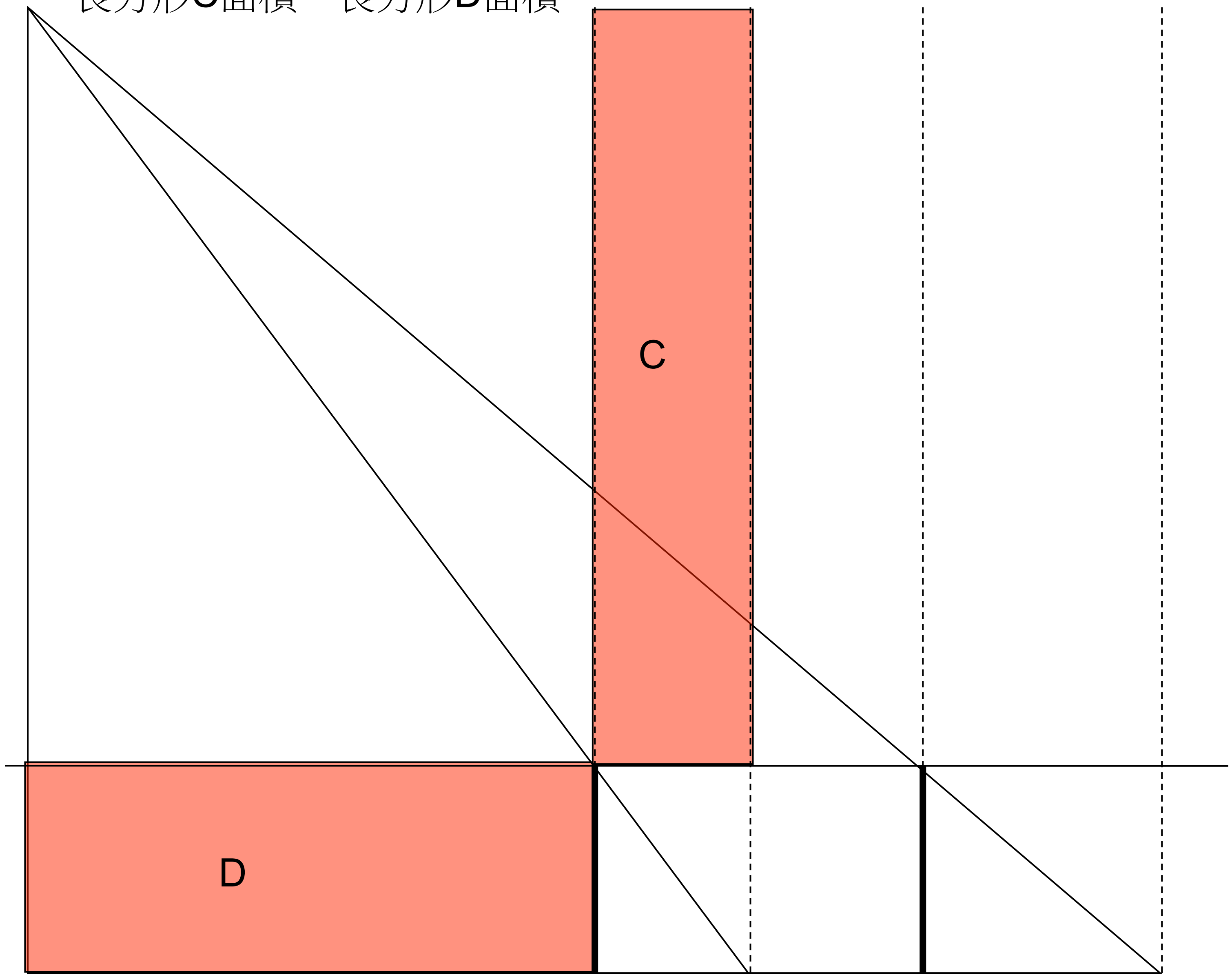
又，三角形E面積＝三角形F面積。

所以，長方形A面積＝長方形B面積。

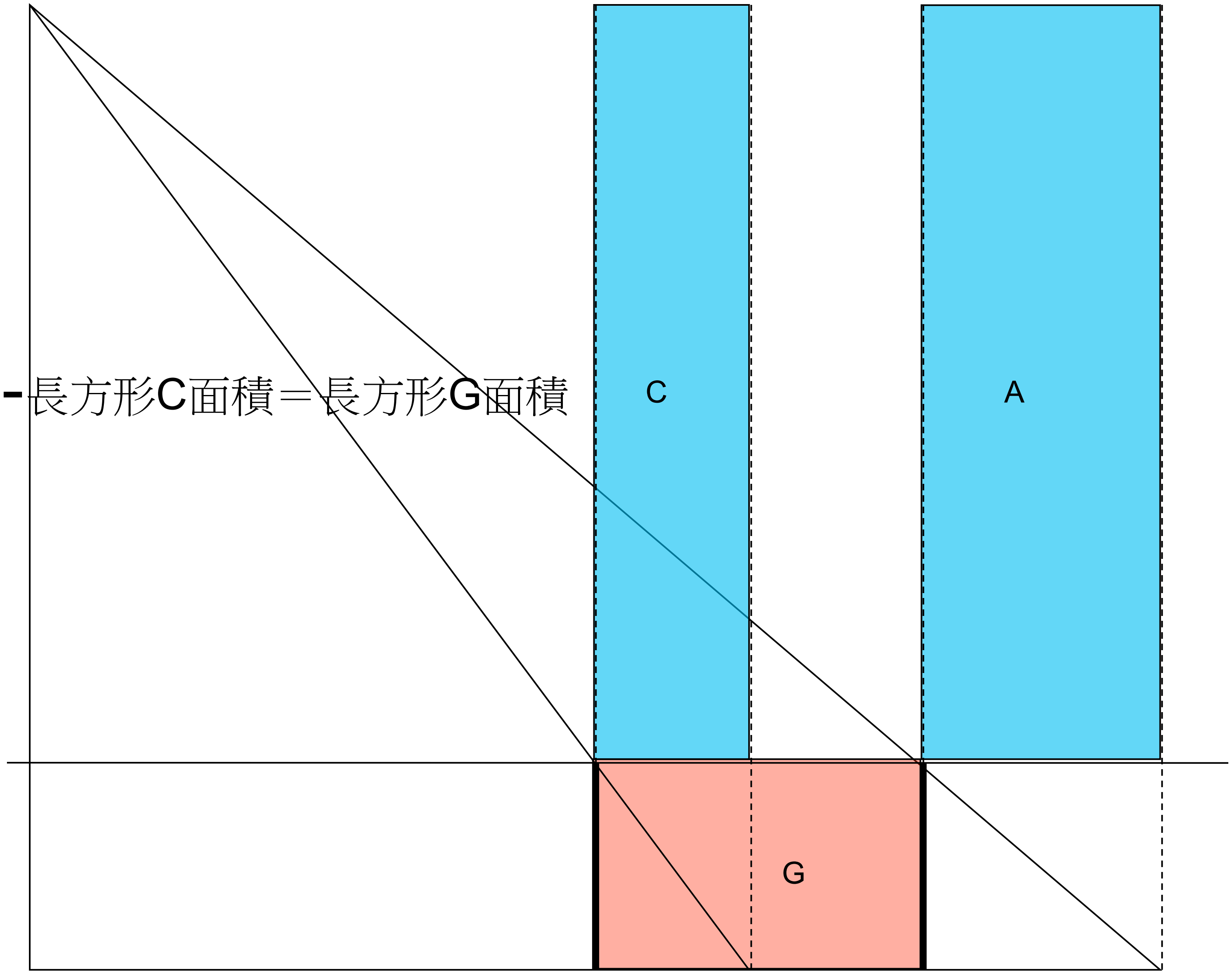
長方形A面積＝長方形B面積



長方形C面積＝長方形D面積



長方形A面積-長方形C面積＝長方形G面積



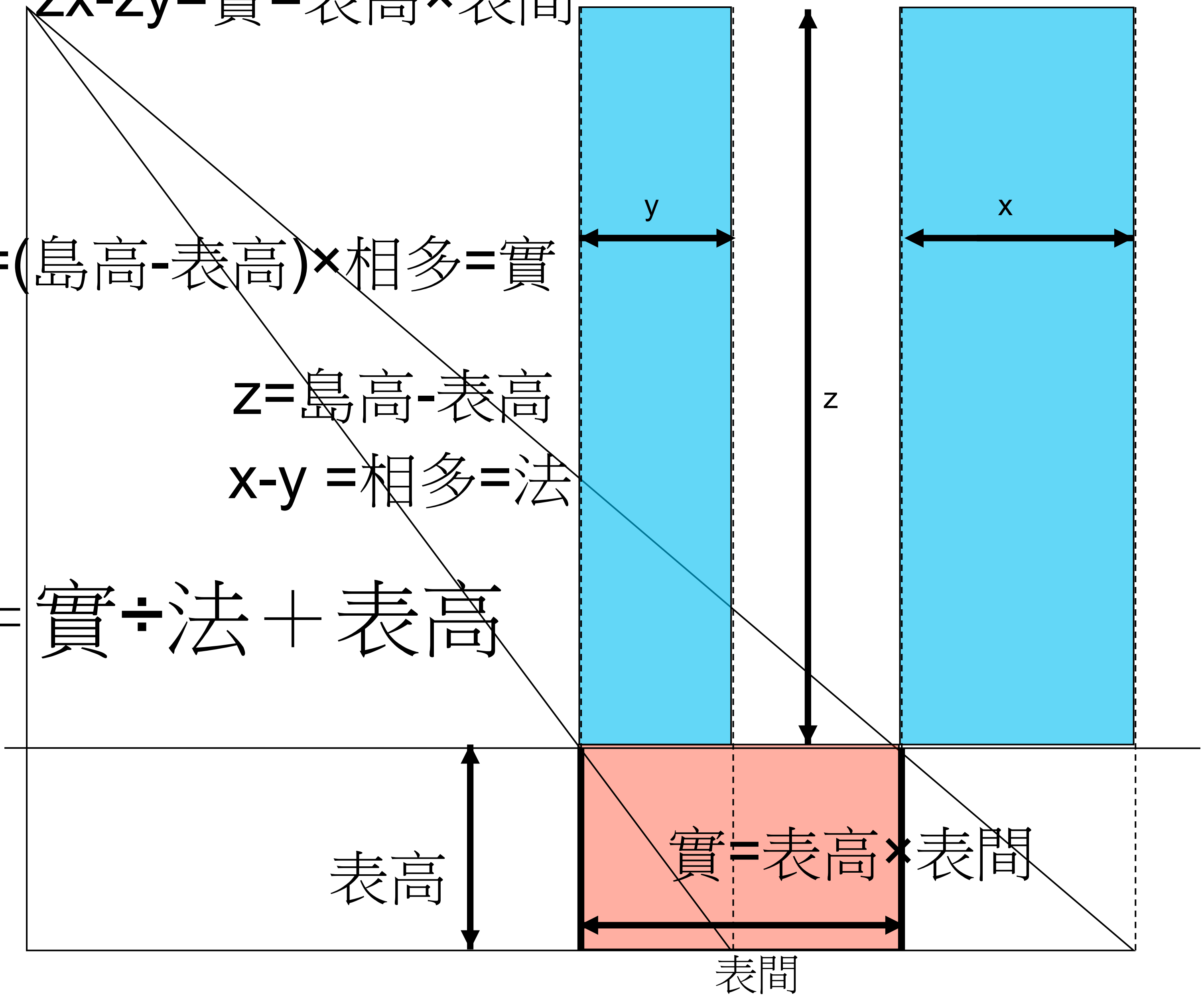
zx-zy=實=表高×表間

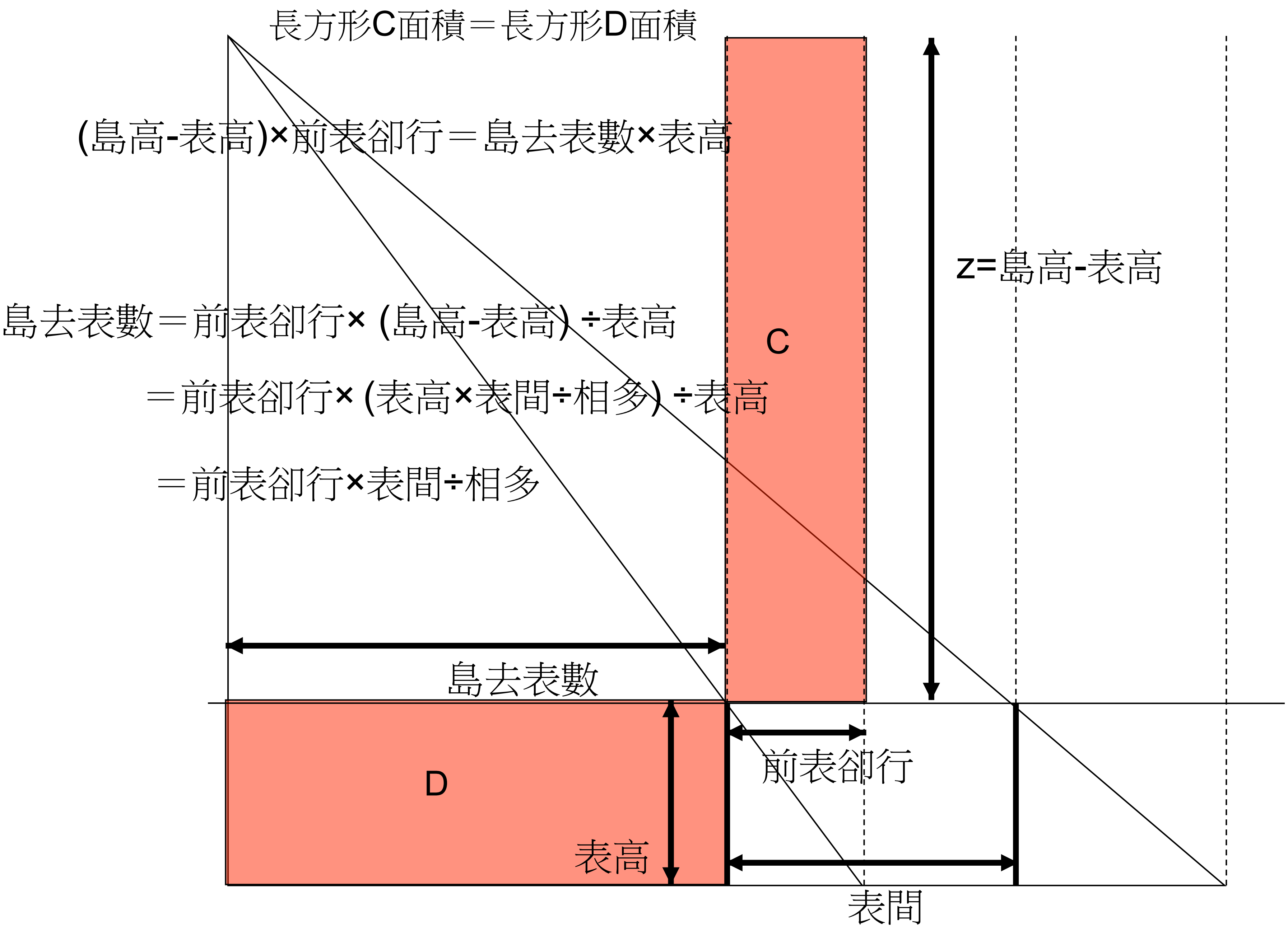
z ×(x-y)=(島高-表高)×相多=實

z=島高-表高

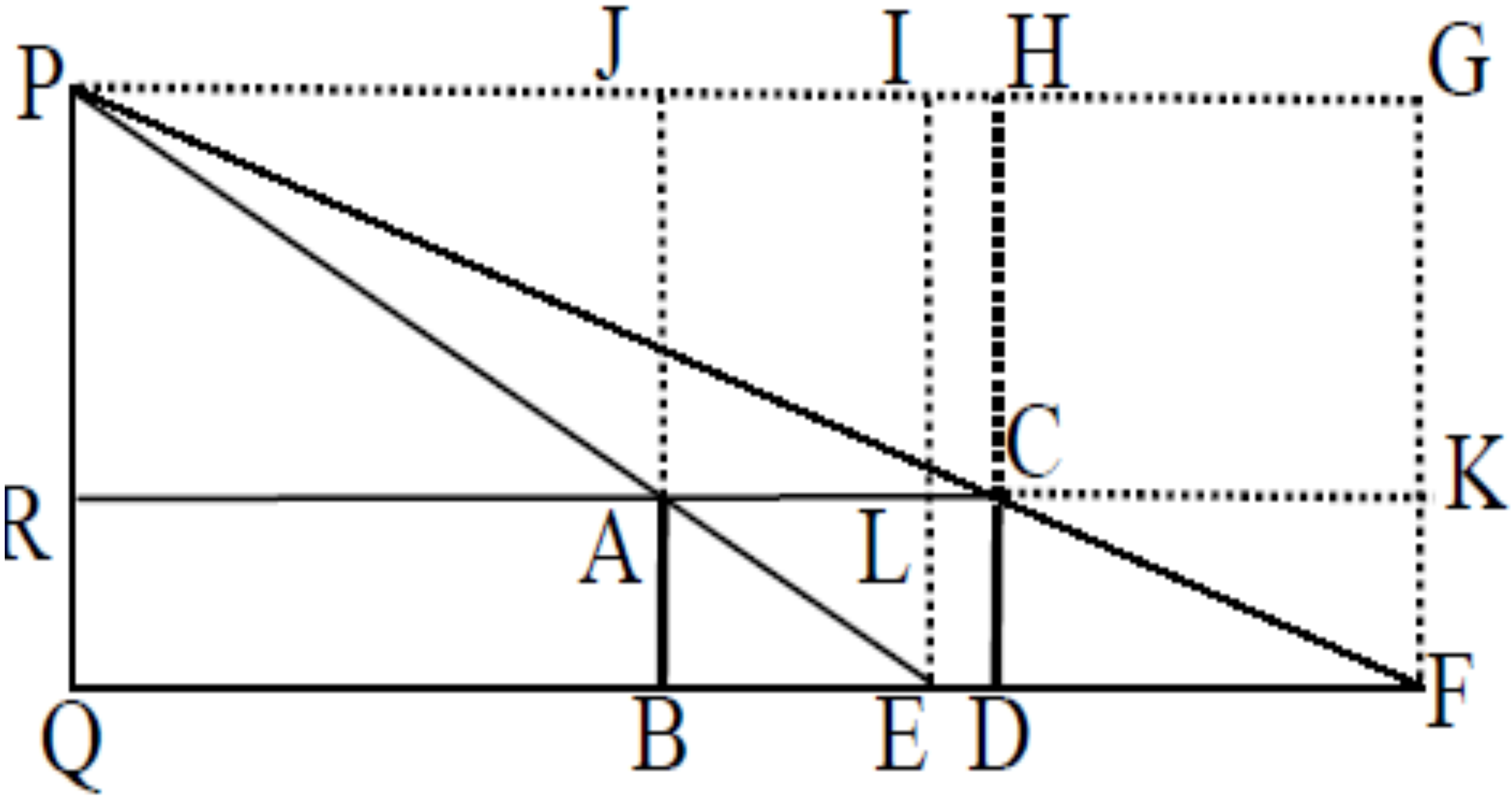
x-y =相多=法

島高＝實÷法＋表高




長方形C面積＝長方形D面積
(島高-表高)×前表卻行＝島去表數×表高
z=島高-表高
島去表數＝前表卻行× (島高-表高) ÷表高
＝前表卻行× (表高×表間÷相多) ÷表高
＝前表卻行×表間÷相多
C
島去表數
D
前表卻行
表高
表間

比較現代一點的表達方式：



如圖，在長方形PGFQ 中，
長方形CHGK 的面積=長方形CDQR的面積

在長方形PIEQ中，
長方形AJIL 的面積=長方形ABQR 的面積，

然後兩式相減，
長方形CHGK 的面積－長方形AJIL 的面積
=長方形CDQR的面積－長方形ABQR 的面積
=長方形ABDC的面積

所以，

$$\overline{PR}\times(\overline{CK}-\overline{AL})=\overline{BD}\times\overline{AB}\Rightarrow(\overline{PQ}-\overline{AB})\times(\overline{DF}-\overline{BE})=\overline{BD}\times\overline{AB}\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{(\overline{DF}-\overline{BE})}+\overline{AB}$$

又長方形ABQR 的面積=長方形AJIL 的面積，所以：

$$\overline{BQ}\times\overline{AB}=\overline{BE}\times\overline{PR}\Rightarrow\overline{BQ}\times\overline{AB}=\overline{BE}\times(\overline{PQ}-\overline{AB})$$

再將上述 $\overline{PQ}=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{(\overline{DF}-\overline{BE})}+\overline{AB}$ 代入，

即得

$$\overline{BQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{BE}}{\overline{DF}-\overline{BE}}$$

現代流行的方法：

Consider similar triangles FDC and FQP

CD : PQ = DF : QF

Consider similar triangles EBA and EQP

AB : PQ = BE : QE

PQ＝PR＋AB

CD=AB

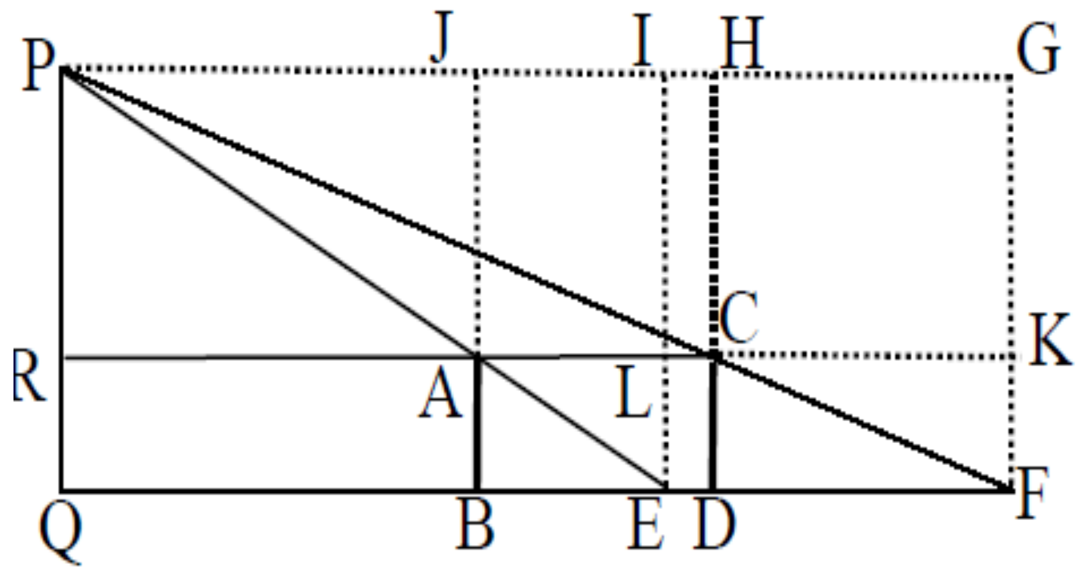
QF=DF+BD+BQ

QE=BE+BQ

AB / (PR+AB) = DF / (DF+BD+BQ)

AB / (PR+AB) = BE / (BE+BQ)

The two unknowns are PR and BQ



$$AB / (PR+AB) = DF / (DF+BD+BQ)$$
$$AB / (PR+AB) = BE / (BE+BQ)$$

Solving the two equations with two unknowns PR and BQ:

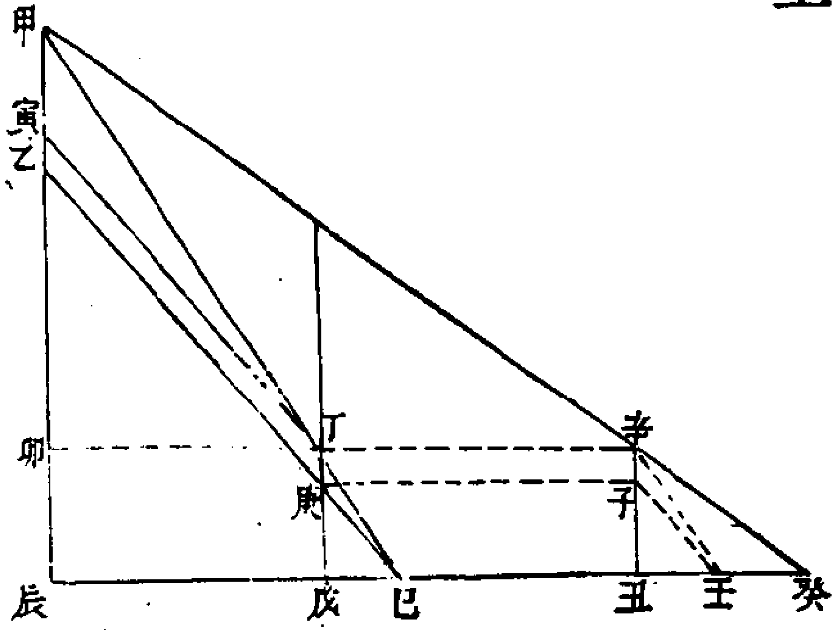
$$BQ=BE \times BD / [DF-BE]$$
$$PQ = BD \times AB / [DF-BE] + AB$$

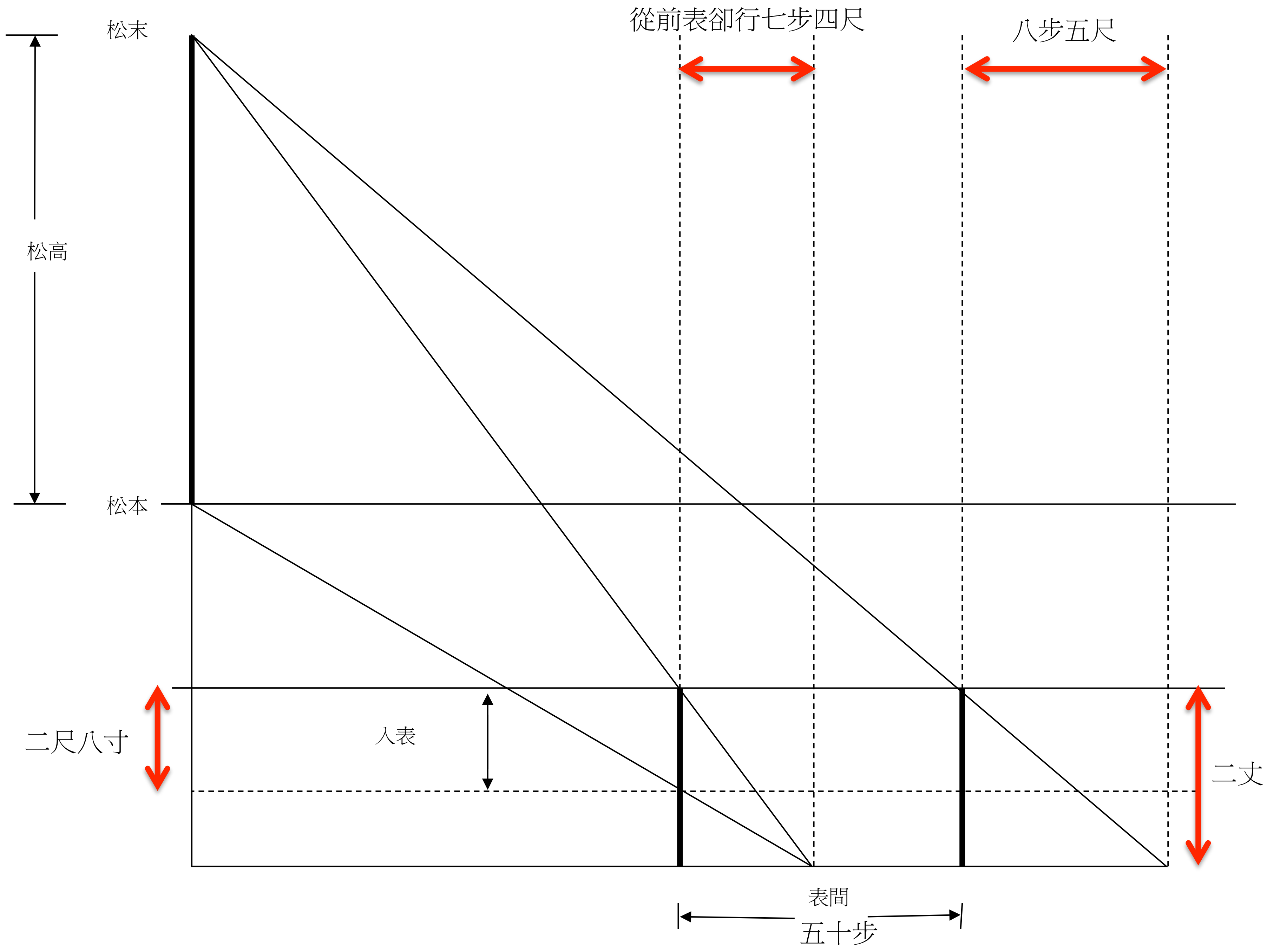
Note：這種方法並不合乎劉徽當時的時代背景。

望松生山上

- 今有望松生山上，不知高下。立兩表齊，高二丈，前後相去五十步，令後表與前表參相直。從前表卻行七步四尺，薄地遙望松末，與表端參合。又望松本，入表二尺八寸。復從後表卻行八步五尺，薄地遙望松末，亦與表端參合。問松高及山去表各幾何？
- 答曰：松高一十二丈二尺八寸；山去表一里二十八步、七分步之四。
- 術曰：以入表乘表間為實。相多為法，除之。加入表，即得松高。求表去山遠近者：置表間，以前表卻行乘之為實。相多為法，除之，得山去表。

望松生山上




松末
松高
松本
從前表卻行七步四尺
八步五尺
二尺八寸
入表
二丈
表間
五十步

術曰：以入表乘表間為實。相多為法，除之。加入表，即得松高。

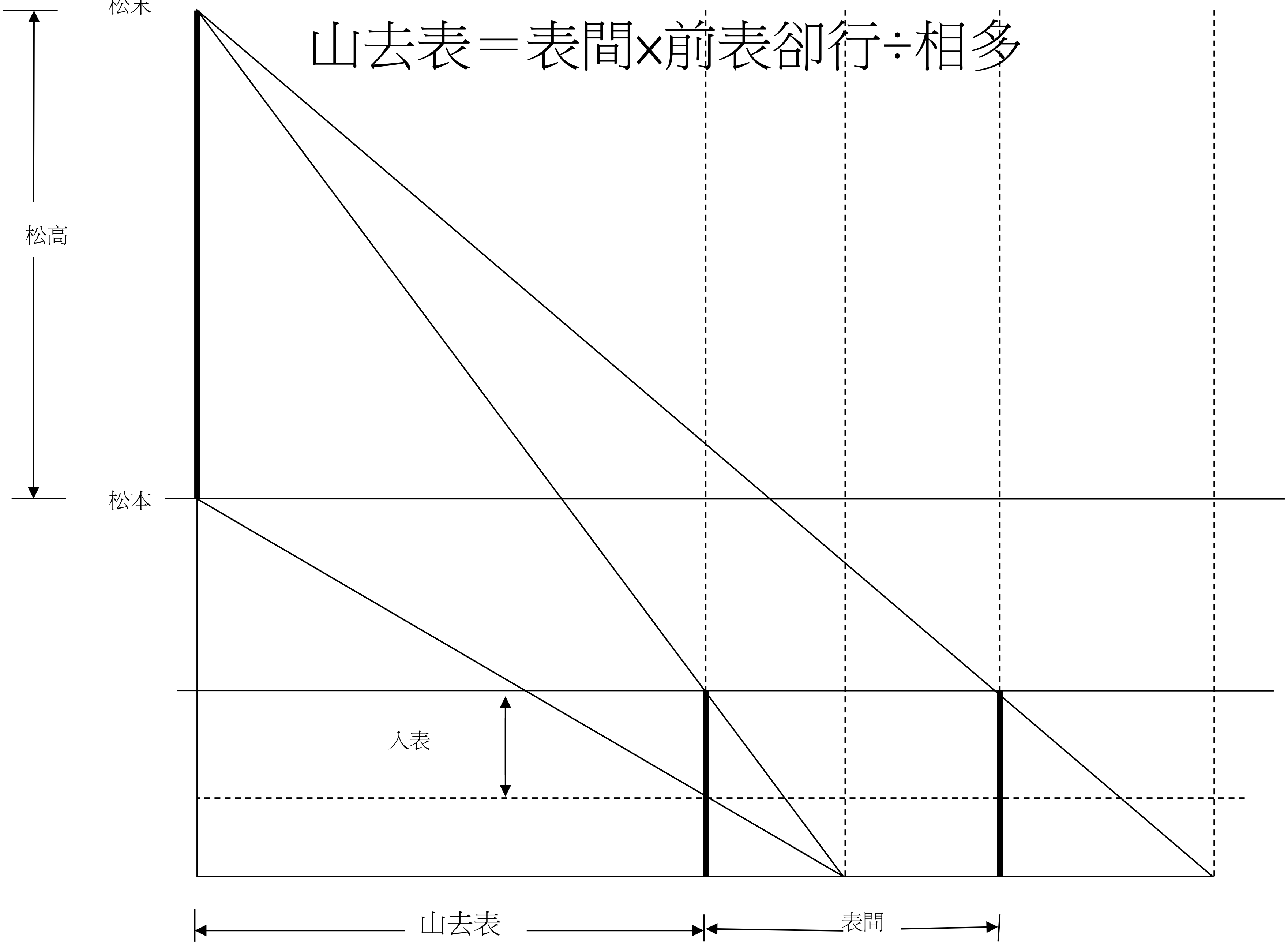
- 實＝入表×表間＝二尺八寸×五十步
- 1步 ＝ 6 尺， 1尺＝10寸
- 實＝2.8尺×（50×6）尺＝840
- 法＝相多＝八步五尺減七步四尺＝7尺
- 松高＝實÷法＋入表＝840÷7＋2.8 ＝122.8尺
- 1 丈 ＝ 10 尺
- 松高＝一十二丈二尺八寸

置表間，以前表卻行乘之為實。相多為法，除之，得山去表。

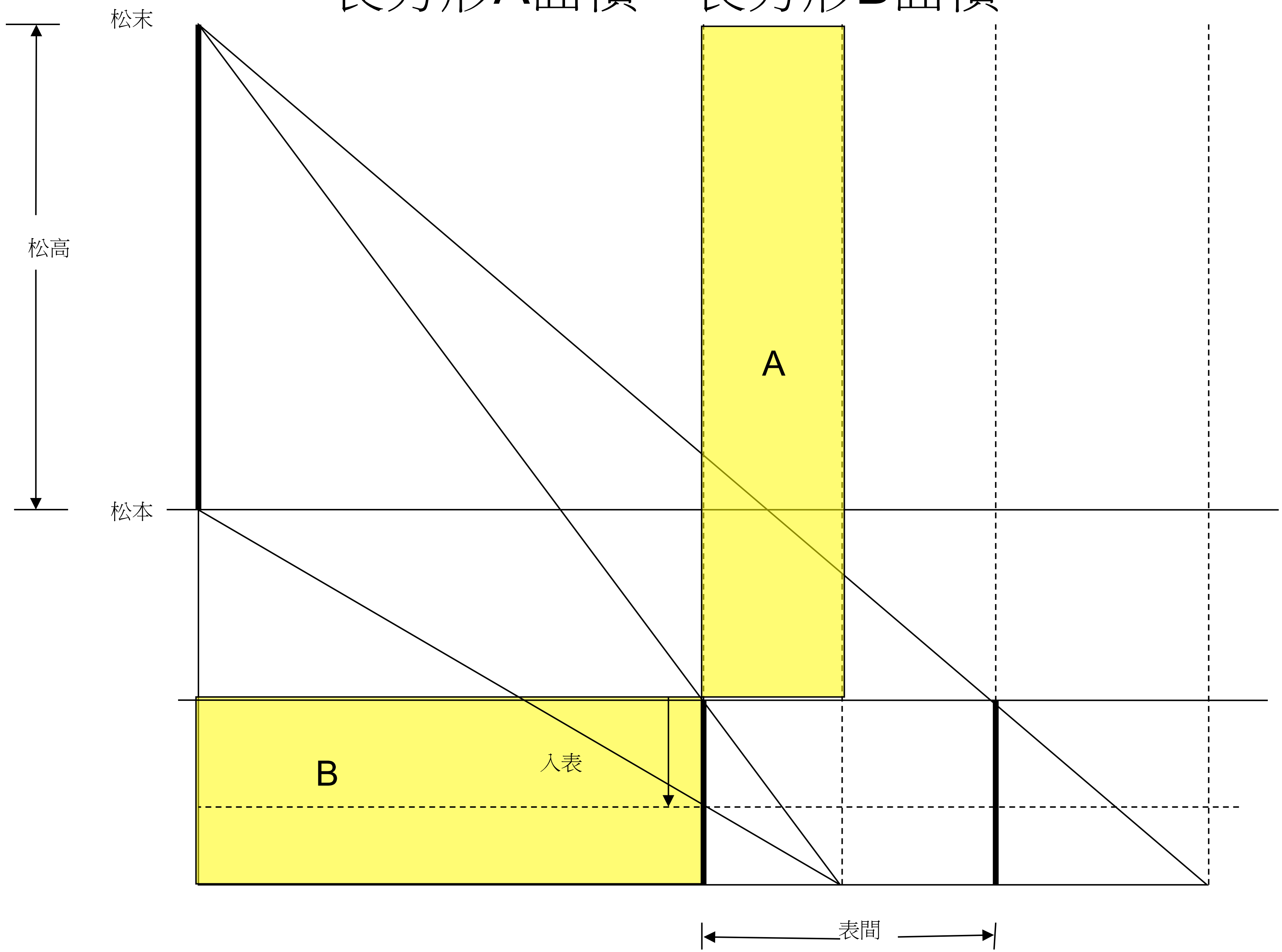
- 實＝表間×前表卻行＝五十步×七步四尺。
- 1步 ＝ 6 尺。
- 實＝（50×6）尺×（$7\times6+4$）尺＝13800。
- 法＝相多＝八步五尺減七步四尺＝7尺。
- 山去表＝實÷法＝ $13800\div7=1971\,{}^{3}/_{7}$尺。
- 1 里 ＝ 1800 尺。
- $1971+3/7=1\times1800+171\,{}^{3}/_{7}=1\times1800+28\,{}^{4}/_{7}\times6$。
- 山去表＝一里二十八步、七分步之四。

參考「望海島」中的島去表數

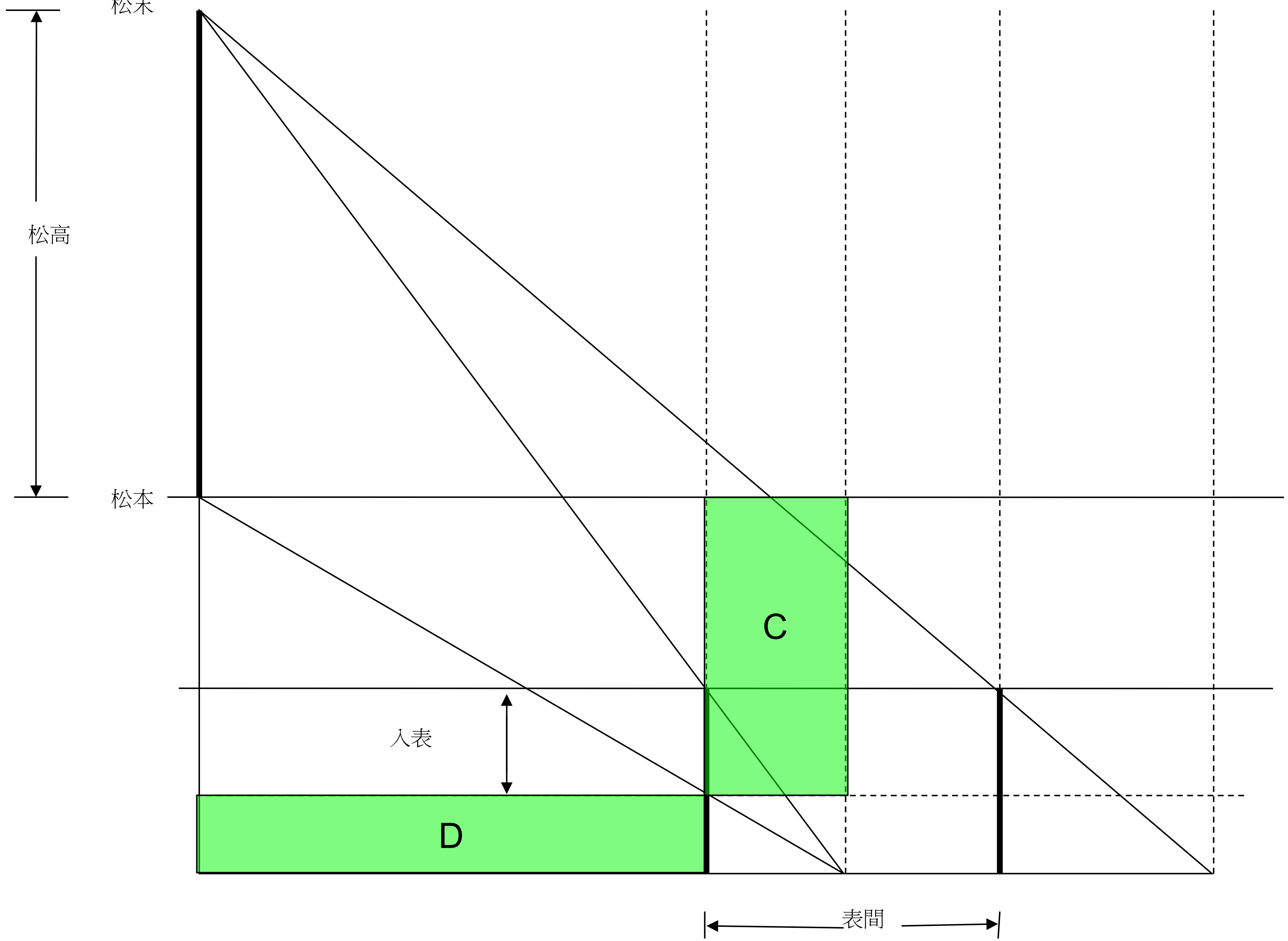
山去表＝表間×前表卻行÷相多



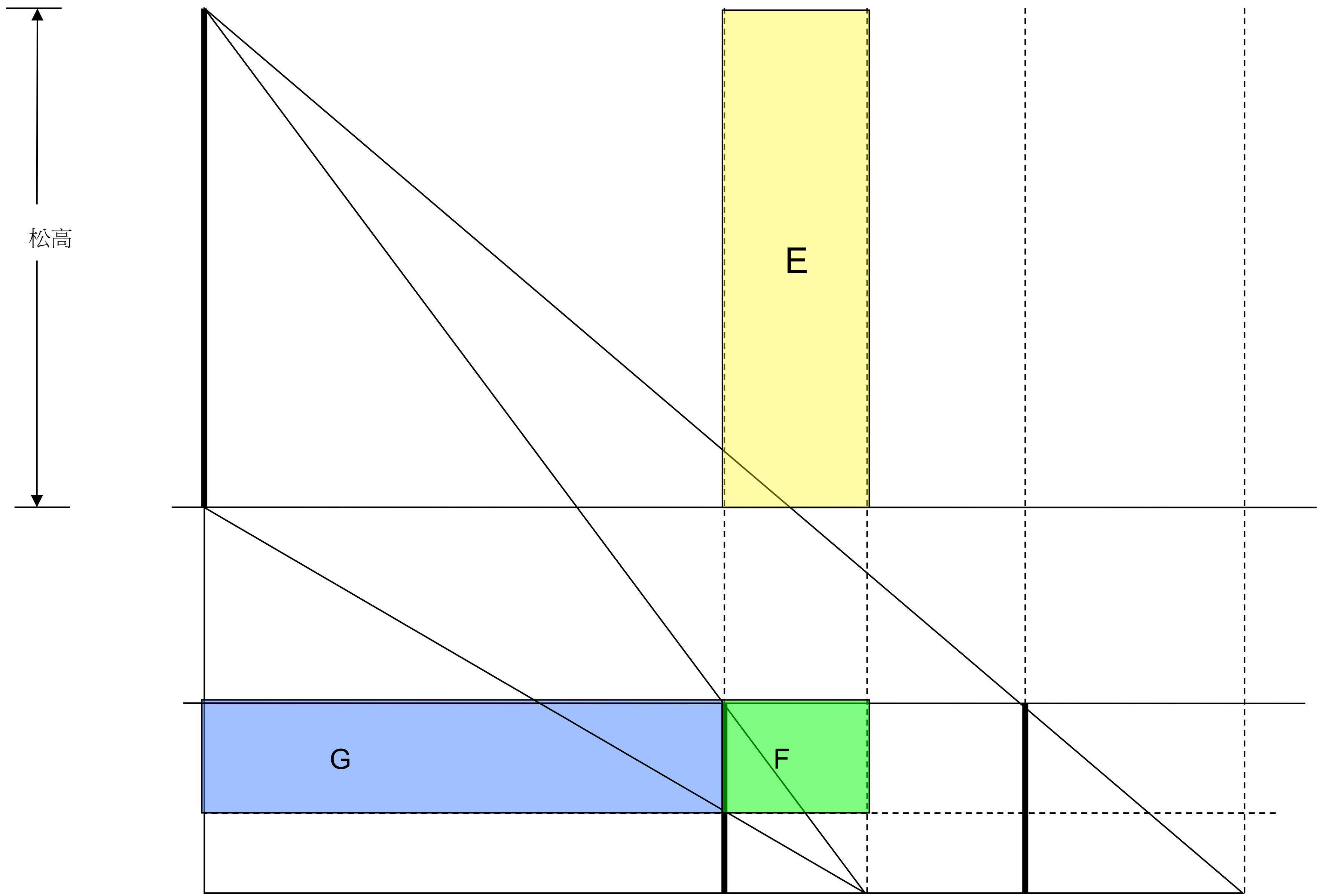
長方形A面積＝長方形B面積



長方形C面積＝長方形D面積



長方形E面積－長方形F面積＝長方形G面積



松高×前表卻行−入表×前表卻行 ＝ 入表×山去表

松高x前表郤行－入表x前表郤行 ＝ 入表x山去表

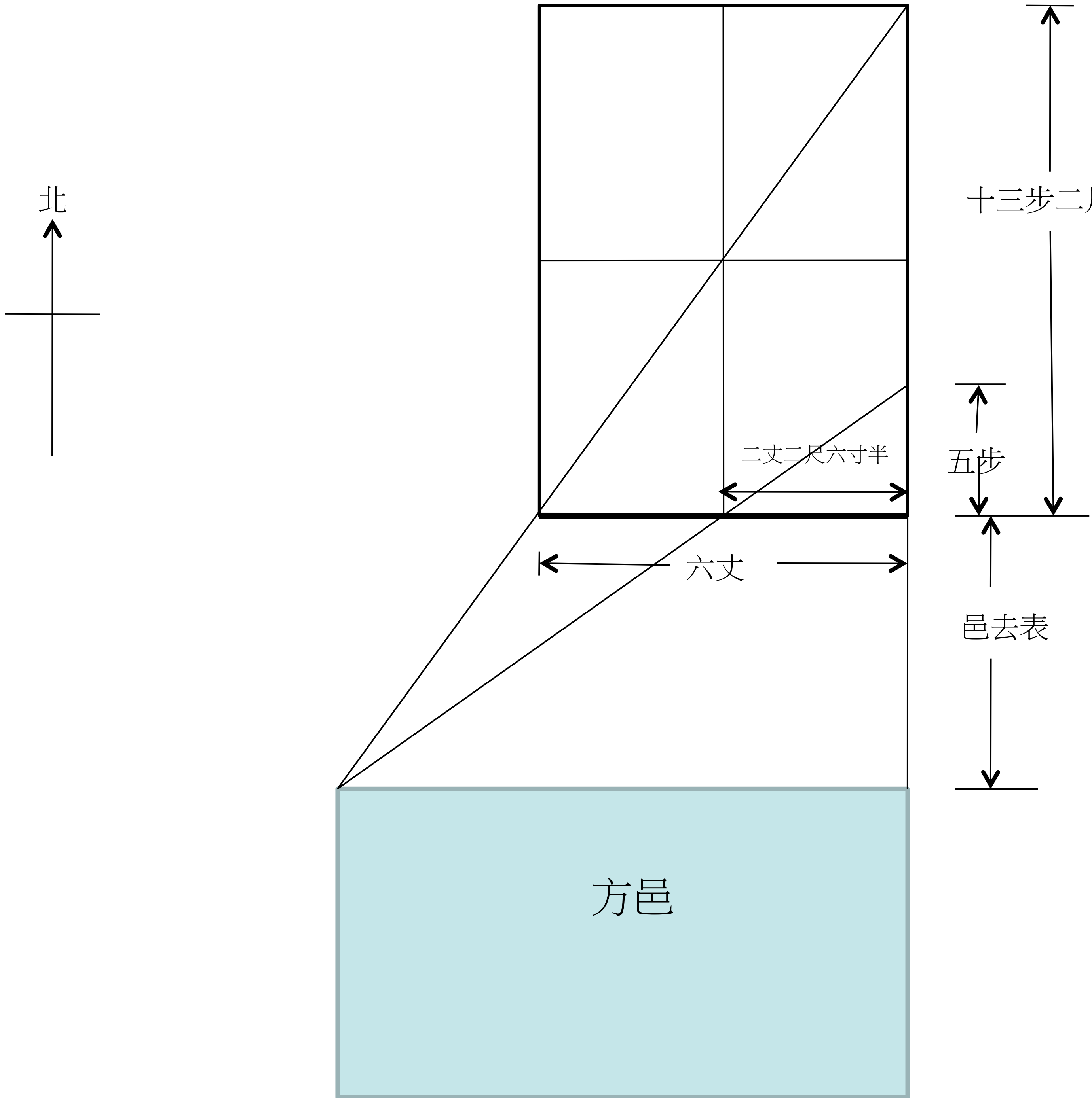
松高＝ 入表x山去表÷前表郤行＋入表

山去表＝表間x前表郤行÷相多

松高＝入表x表間x前表郤行÷相多÷前表郤行＋入表
＝入表x表間÷相多+入表

南望方邑

- 今有南望方邑，不知大小。立兩表東、西去六丈，齊人目，以索連之。令東表與邑東南隅及東北隅參相直。當東表之北卻行五步，遙望邑西北隅，入索東端二 丈二尺六寸半。又卻北行去表一十三步二尺，遙望邑西北隅，適與西表相參合。問邑方及邑去表各幾何？ 答曰：邑方三里四十三步、四分步之三；邑去表四里四十五步。
- 術曰：以入索乘後去表，以兩表相去除之，所得為景差；以前去表減之，不盡以為法。置後去表，以前去表減之，餘以乘入索為實。實如法而一，得邑方。求去表遠近者：置後去表，以景差減之，餘以乘前去表為實。實如法而一，得邑去表。


北
十三步二尺
二丈二尺六寸半
五步
六丈
邑去表
方邑

以入索乘後去表，以兩表相去除之，所得為景差；以前去表減之，不盡以為法。

1 里 = 1800 尺
1 丈 = 10 尺
1 步 = 6 尺
1 尺 = 10 寸

入索＝二丈二尺六寸半＝22.65尺

後去表＝一十三步二尺＝80尺

兩表相去＝六丈＝6×10尺＝60尺

景差＝ $(22.65\times 80)\div60$＝30.2尺

前去表＝五步＝ 5×6 ＝ 30尺

法＝景差減前去表＝ $30.2-30$＝0.2

置後去表，以前去表減之，餘以乘入索為實。實如法而一，得邑方。

1 里 ＝ 1800 尺
1 丈 ＝ 10 尺
1 步 ＝ 6 尺
1 尺 ＝ 10 寸

後去表＝80尺

前去表＝30尺

入索＝22.65尺

實＝(後去表－前去表) ×入索＝1132.5

邑方＝實÷法＝1132.5 ÷ 0.2 ＝5662.5尺

＝三里四十三步、四分步之三

置後去表，以景差減之，餘以乘前去表為實。實如法而一，得邑去表。

後去表＝80尺

景差＝30.2

前去表＝30尺

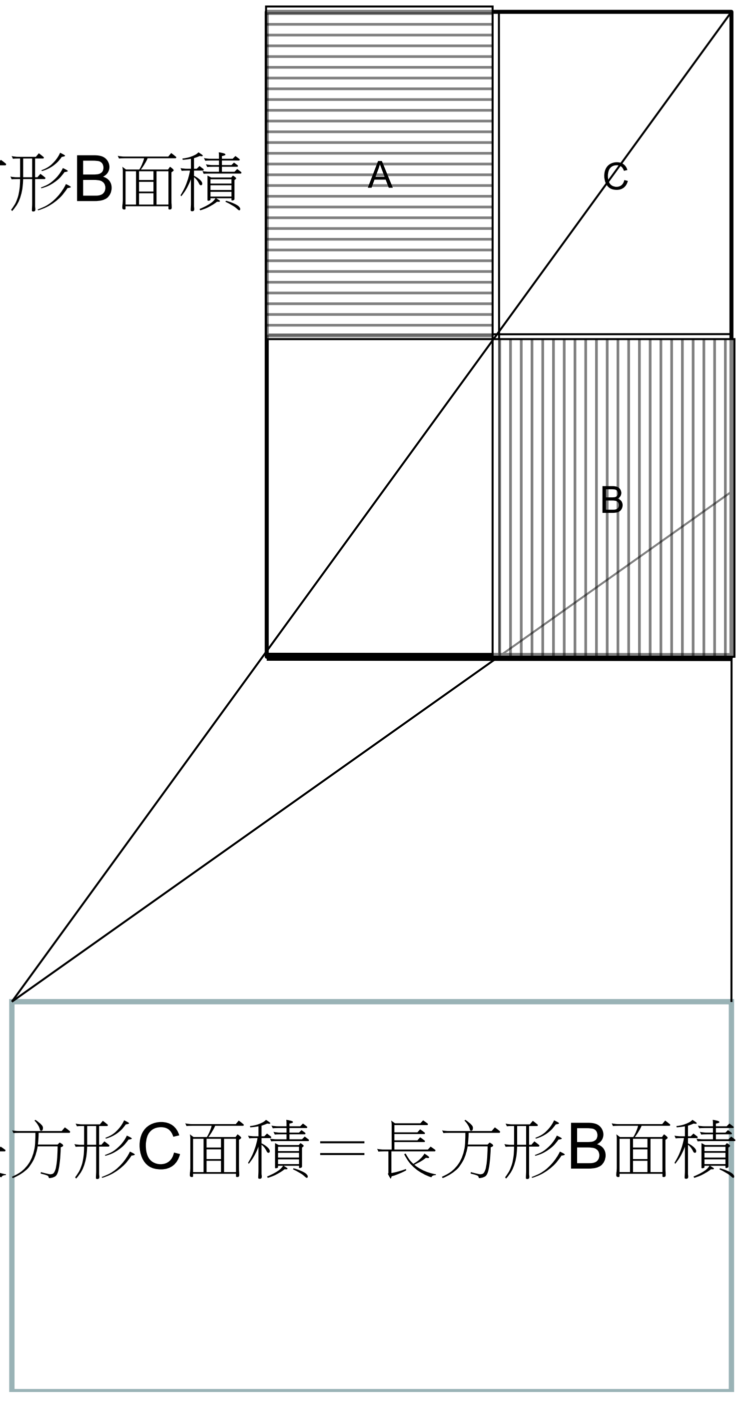
實＝(後去表－景差) ×前去表＝1494

法＝0.2

邑去表＝實÷法＝1494 ÷0.2 ＝7470尺

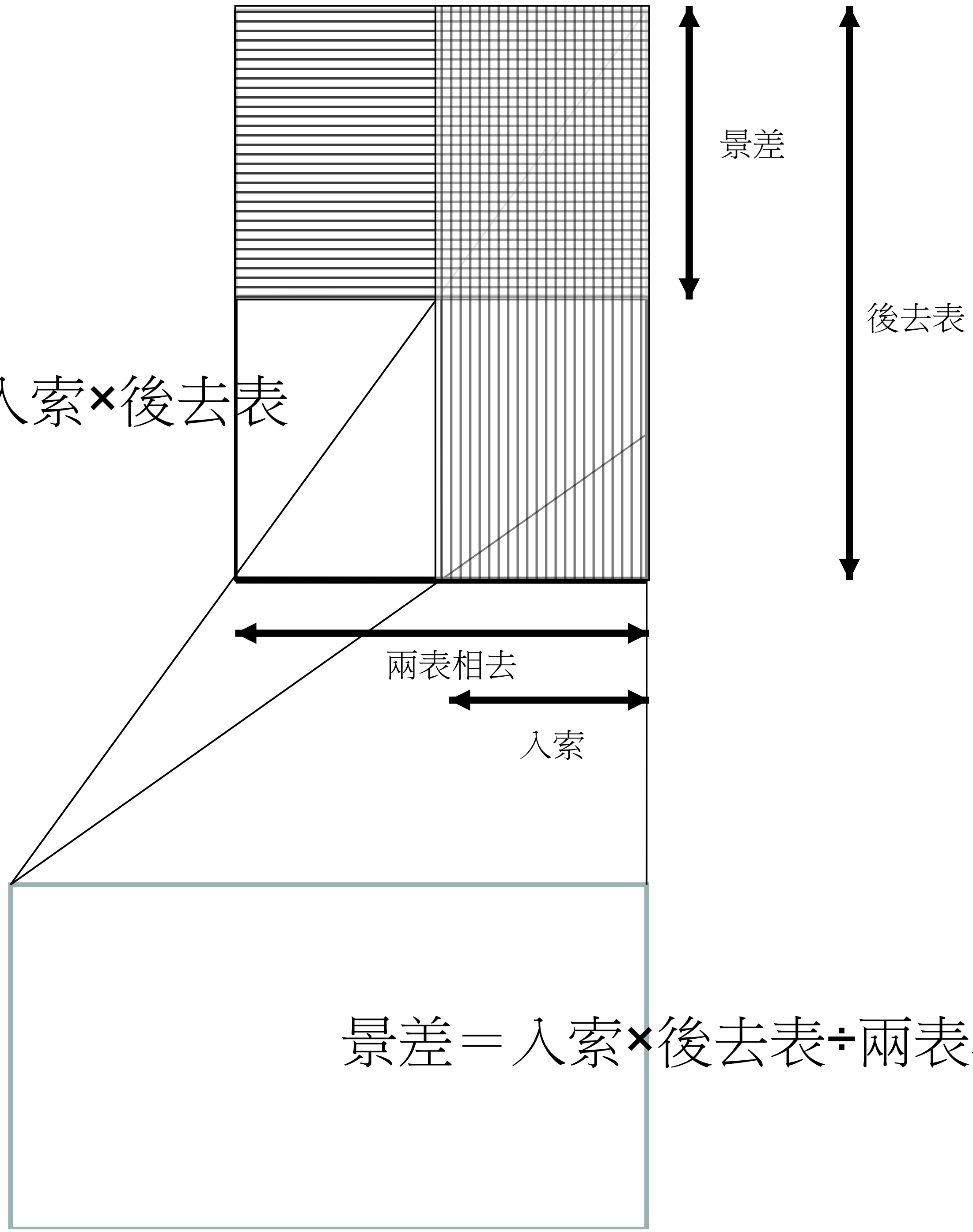
＝四里四十五步

長方形A面積＝長方形B面積



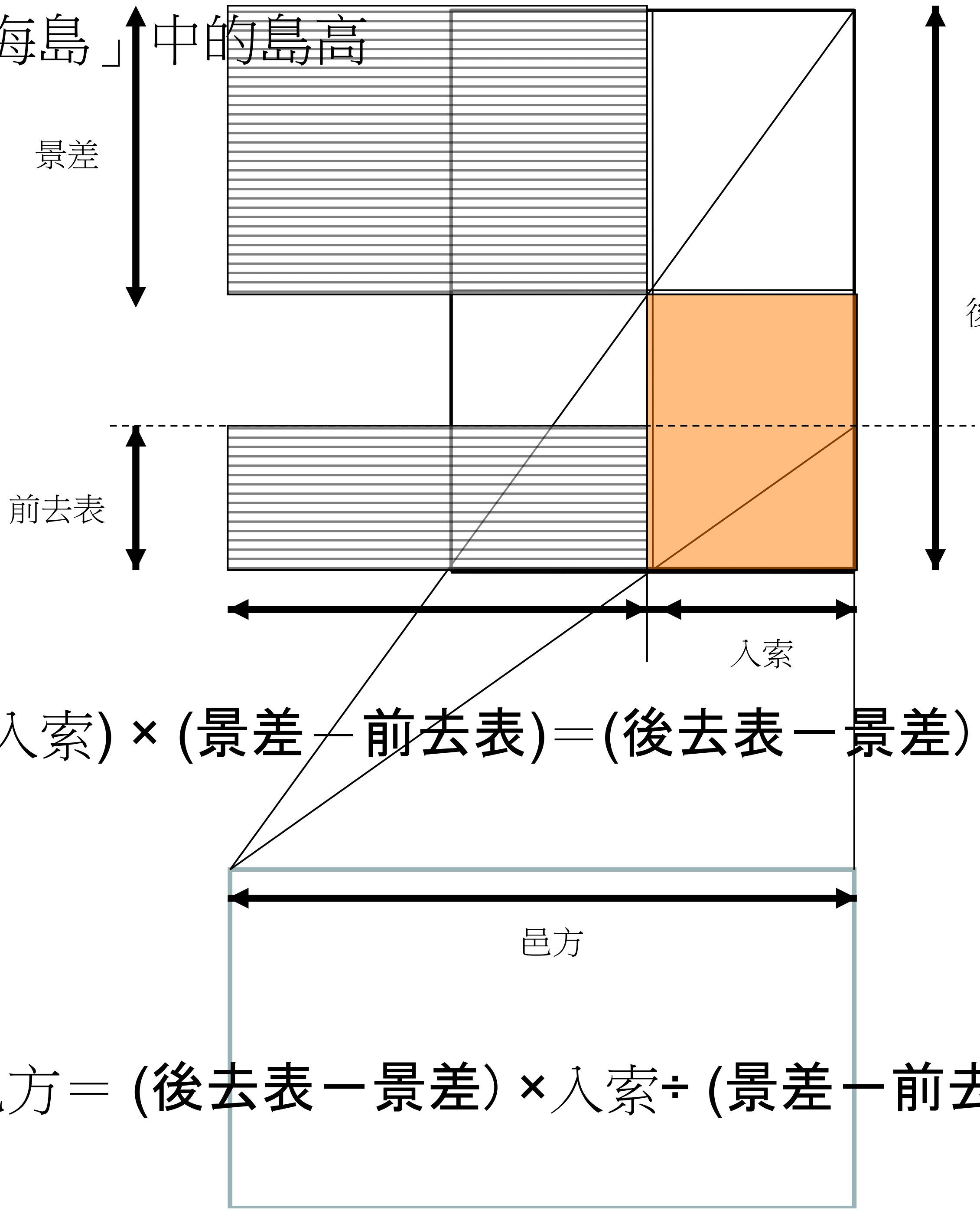
長方形A面積+長方形C面積＝長方形B面積+**長方形C面積**

兩表相去×景差＝入索×後去表



景差＝入索×後去表÷兩表相去

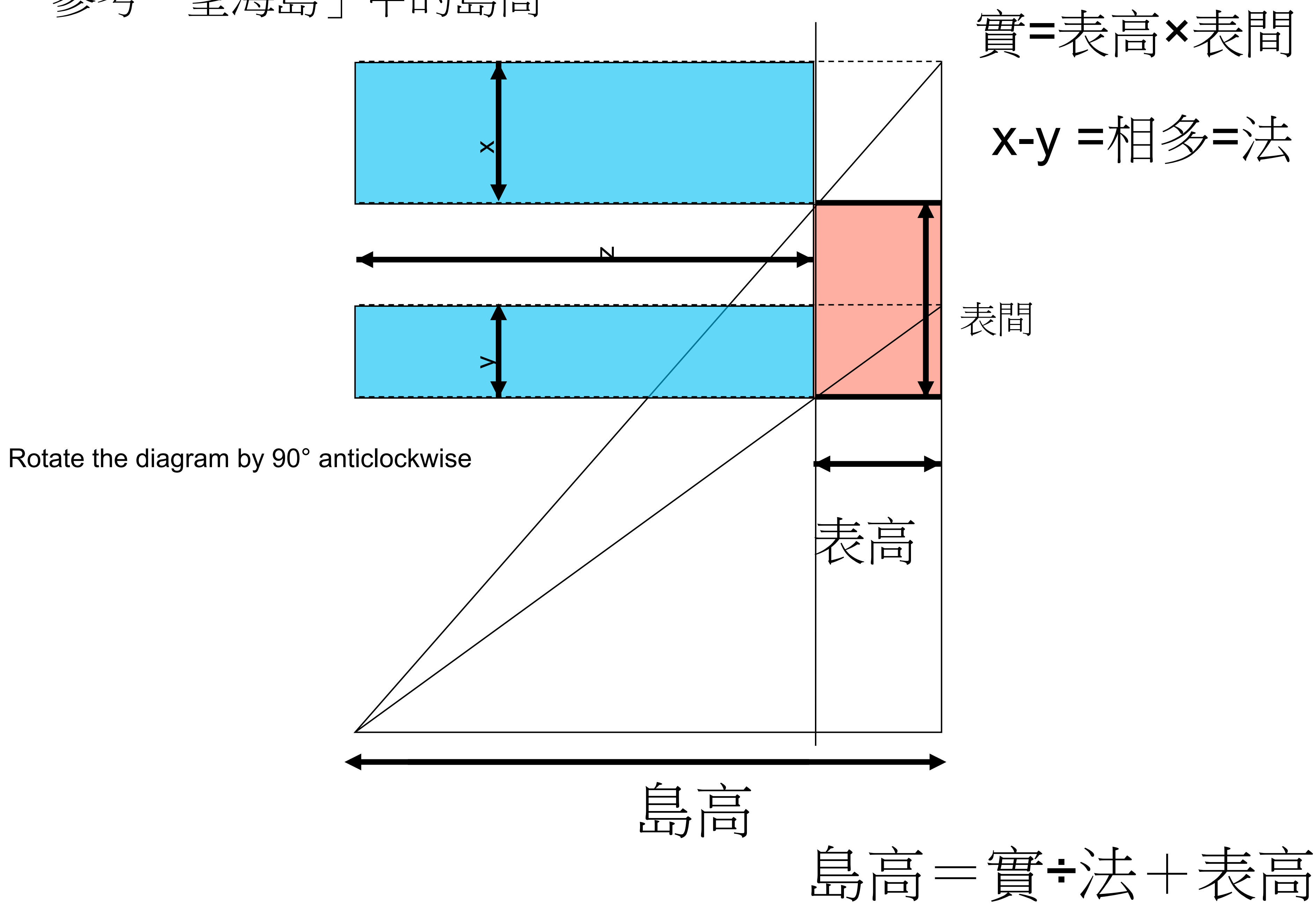
參考「望海島」中的島高



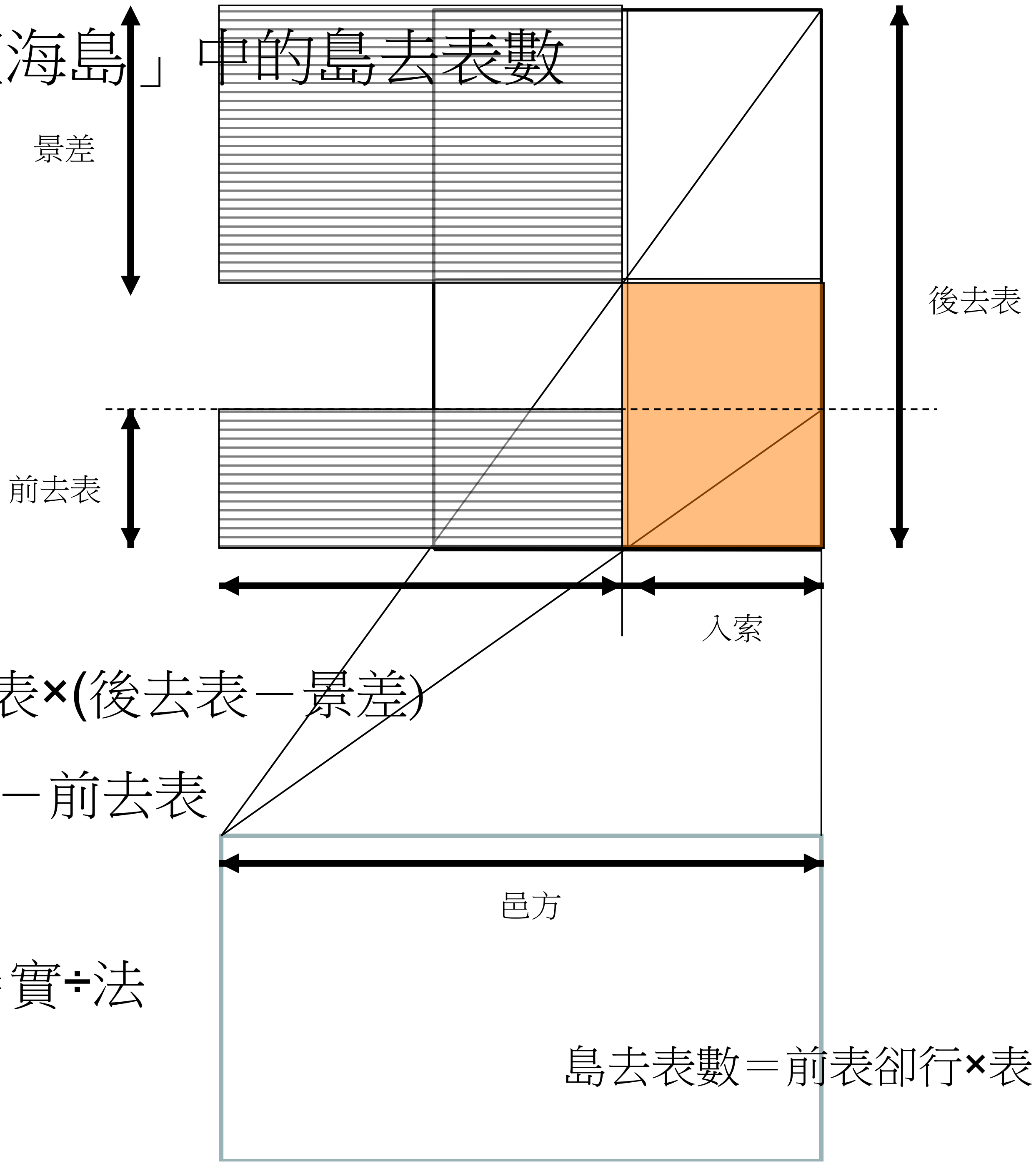
(邑方－入索) × (景差－前去表)＝(後去表－景差) × 入索

邑方＝ (後去表－景差) ×入索÷ (景差－前去表) +入索

參考「望海島」中的島高


實=表高×表間
x-y =相多=法
x
z
y
表間
Rotate the diagram by 90° anticlockwise
表高
島高
島高＝實÷法＋表高

參考「望海島」中的島去表數

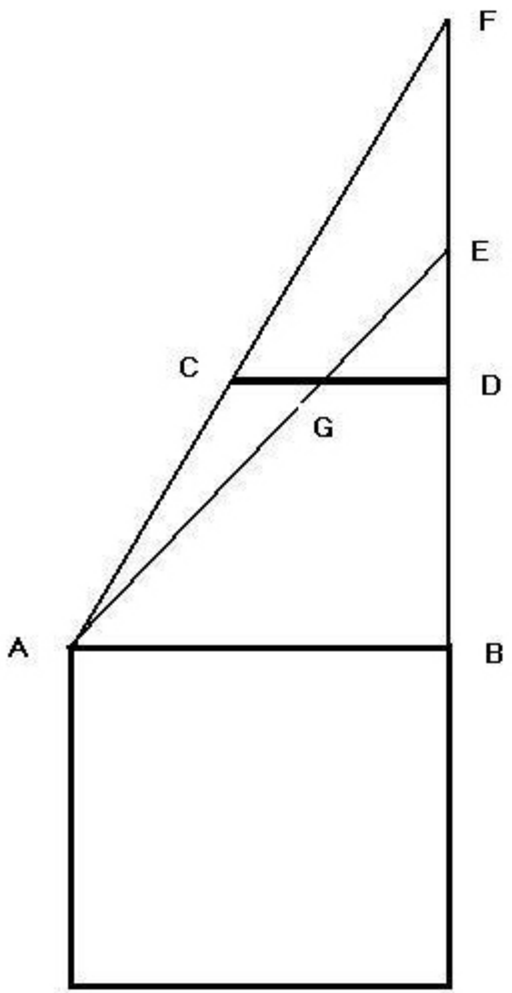


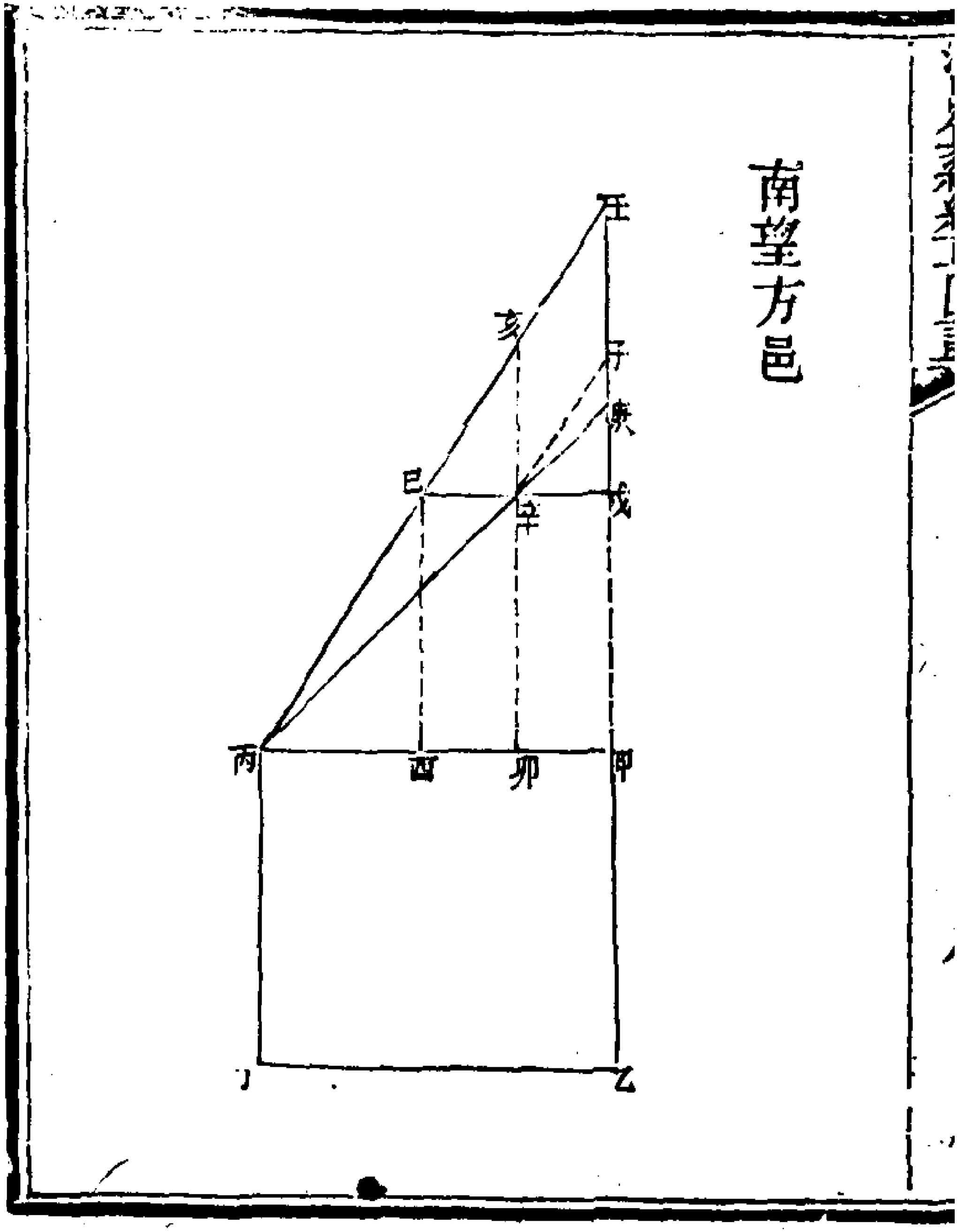
實＝前去表×(後去表－景差)

法＝景差－前去表

邑去表＝實÷法

島去表數＝前表卻行×表間÷相多


F
E
C
D
G
A
B


南望方邑
壬
亥
子
庚
巳
辛
戊
丙
酉
卯
甲
丁
乙

End of this set of lecture notes

The rest of 《海島算經》(Problem 4 to Problem 9) is attached hereafter for your reference.

Problem 4 is Q4 of Assignment 01, thus, the diagram provided might be useful.

望深谷

- 今有望深谷，偃矩岸上，令勾高六尺。從勾端望谷底，入下股九尺一寸。又設重矩於上，其矩間相去三丈。更從勾端望谷底，入上股八尺五寸。問谷深幾何？
- 答曰：四十一丈九尺。
- 術曰：置矩間，以上股乘之，為實。上、下股相減，餘為法，除之。所得以勾高減之，即得谷深。

上股 AC=91寸

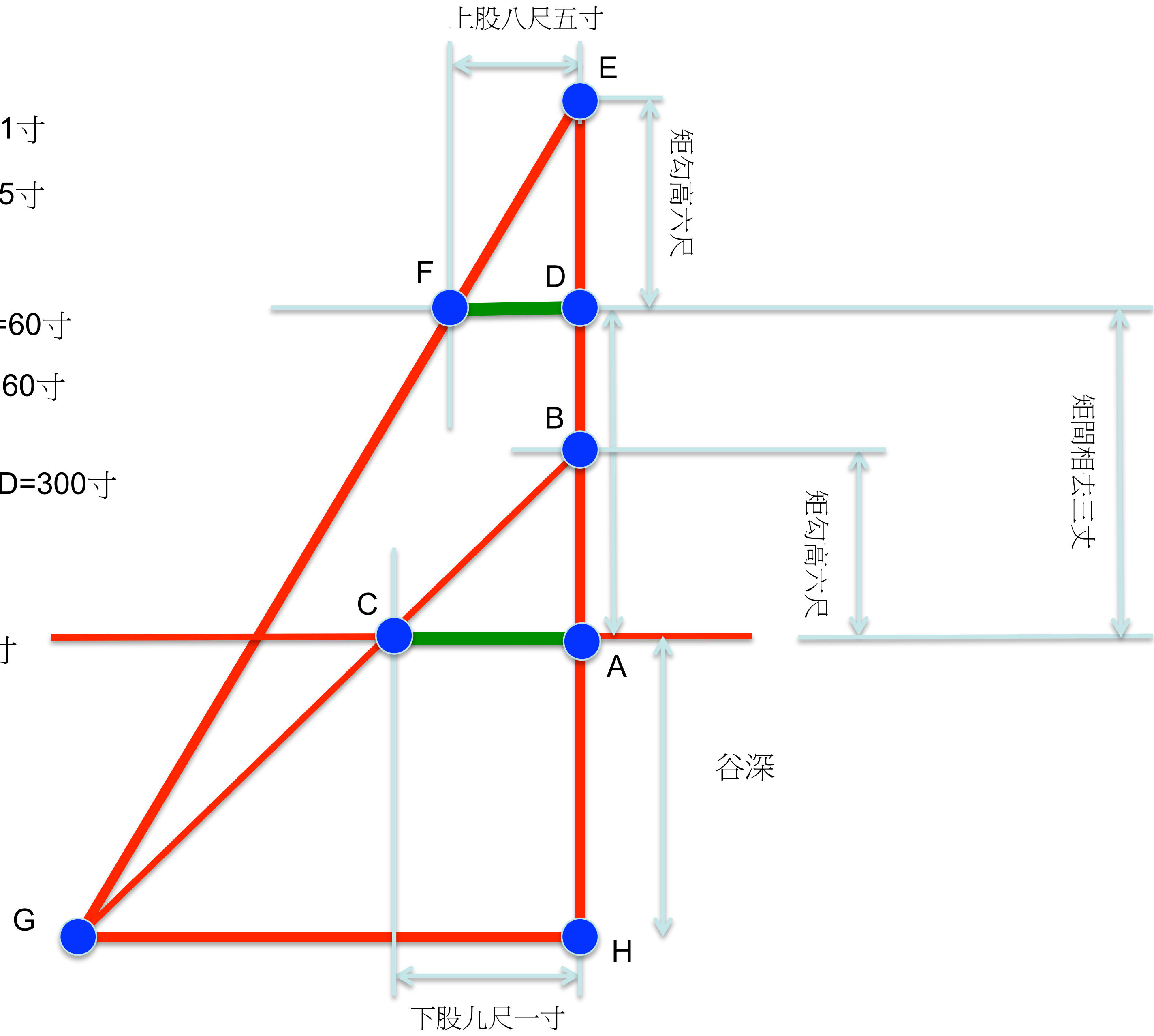
下股 FD=85寸

矩勾高 AB=60寸

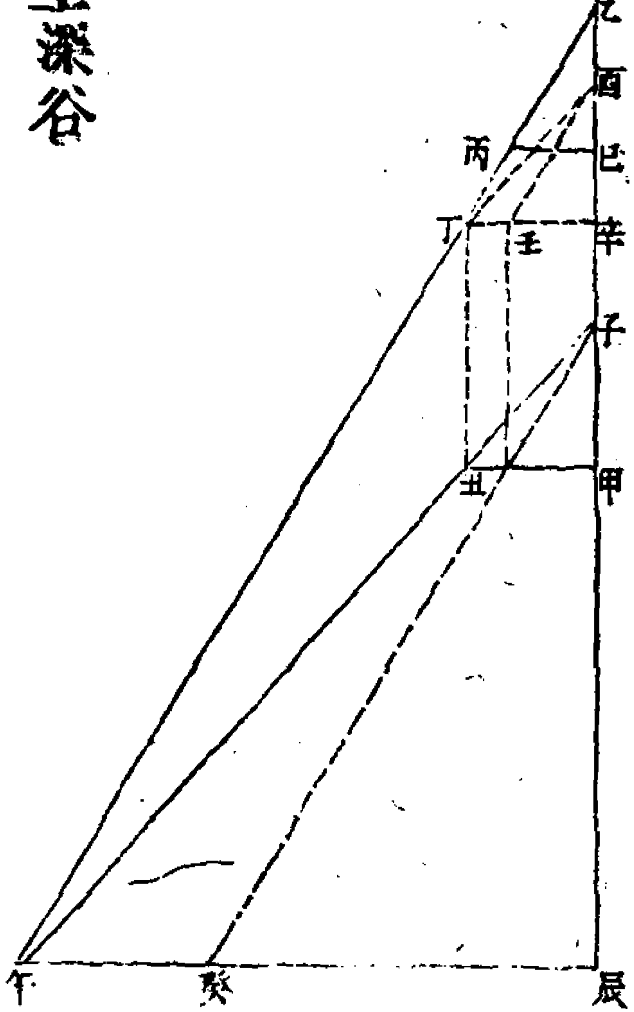
矩勾高 DE=60寸

矩間相去 AD=300寸

谷深 AH = ?寸



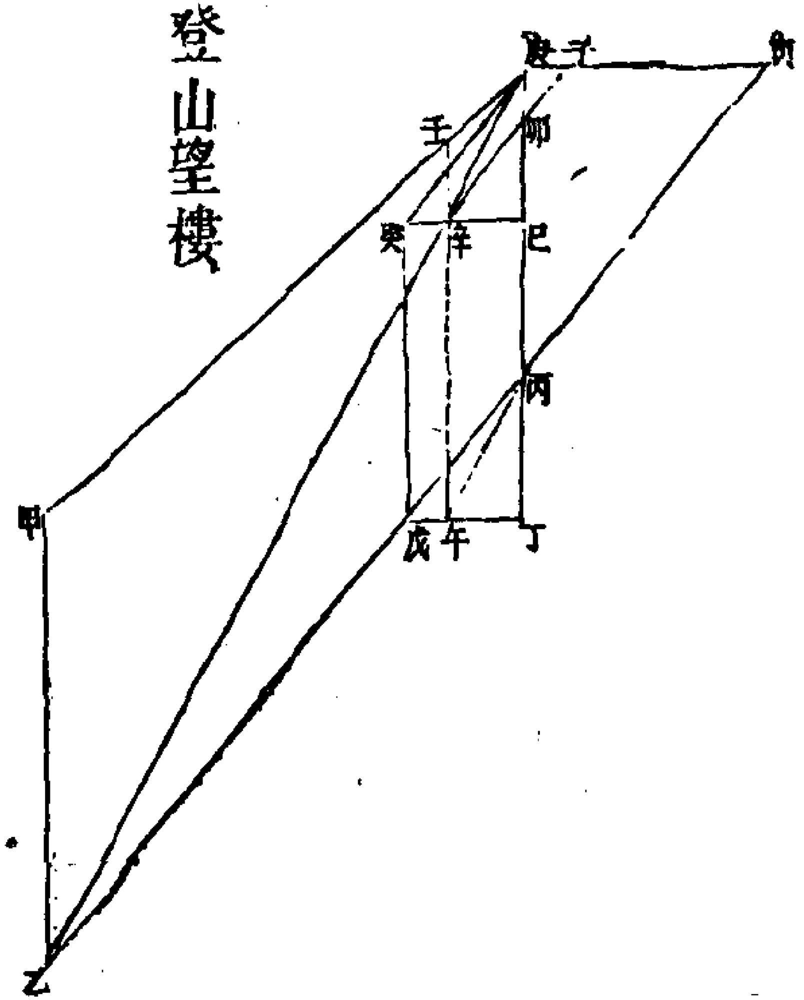
望深谷



登山望樓

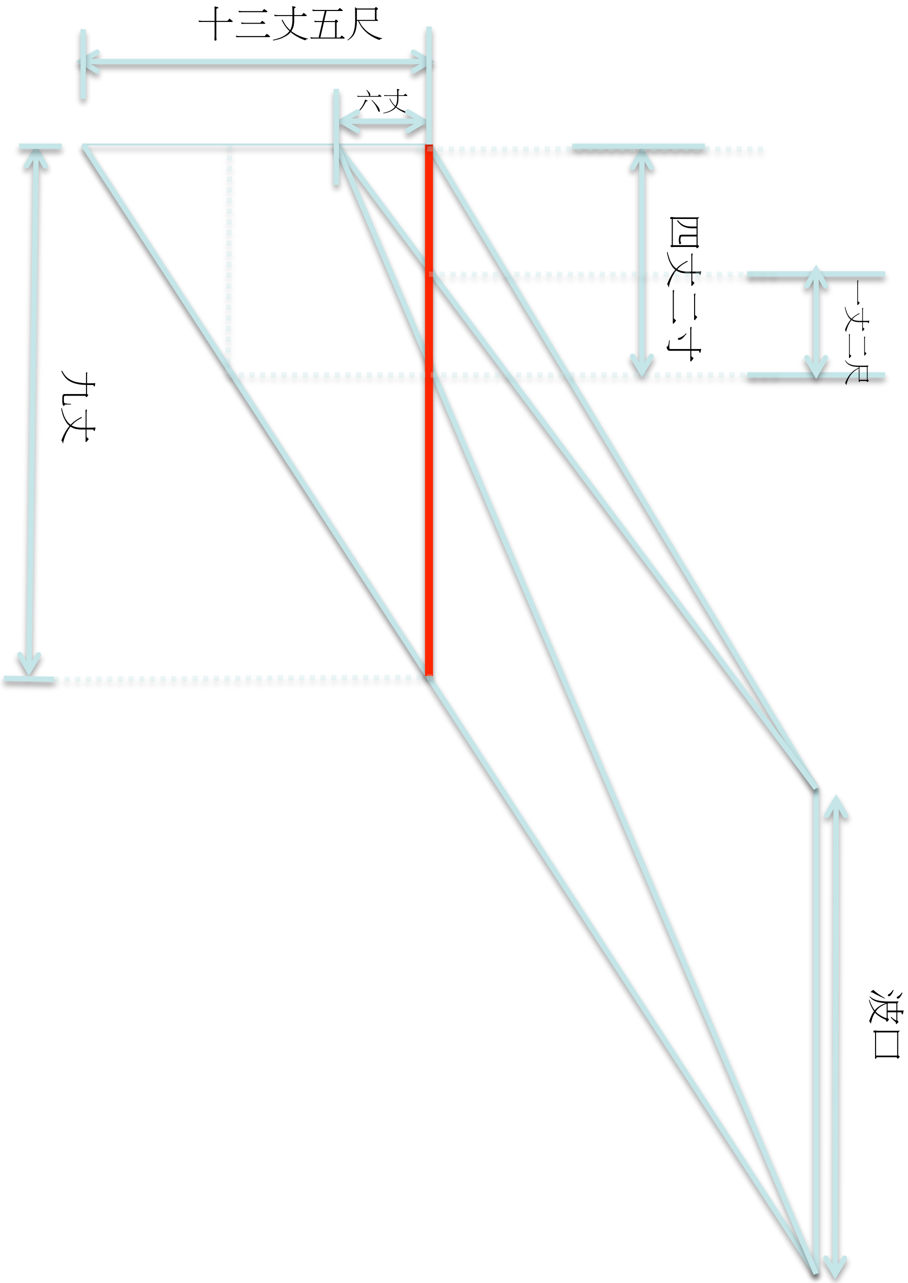
- 今有登山望樓，樓在平地。偃矩山上，令勾高六尺。從勾端斜望樓足，入下股一丈二尺。又設重矩於上，令其間相去三丈。更從勾端斜望樓足，入上股一丈一尺四寸。又立小表於入股之會，復從勾端斜望樓岑端，入小表八寸。問樓高幾何？
- 答曰：八丈。
- 術曰：上下股相減，餘為法；置矩間，以下股乘之，如勾高而一。所得，以入小表乘之，為實。實如法而一，即是樓高。

登山望樓



東南望波口

- 今有東南望波口，立兩表南、北相去九丈，以索薄地連之。當北表之西卻行去表六丈，薄地遙望波口南岸，入索北端四丈二寸。以望北岸，入前所望表裡一丈二尺。又卻後行去表一十三丈五尺。薄地遙望波口南岸，與南表參合。問波口廣幾何？
- 答曰：一里二百步。
- 術曰：以後去表乘入索，如表相去而一。所得，以前去表減之，餘以為法；復以前去表減後去表，餘以乘入所望表裡為實，實如法而一，得波口廣。



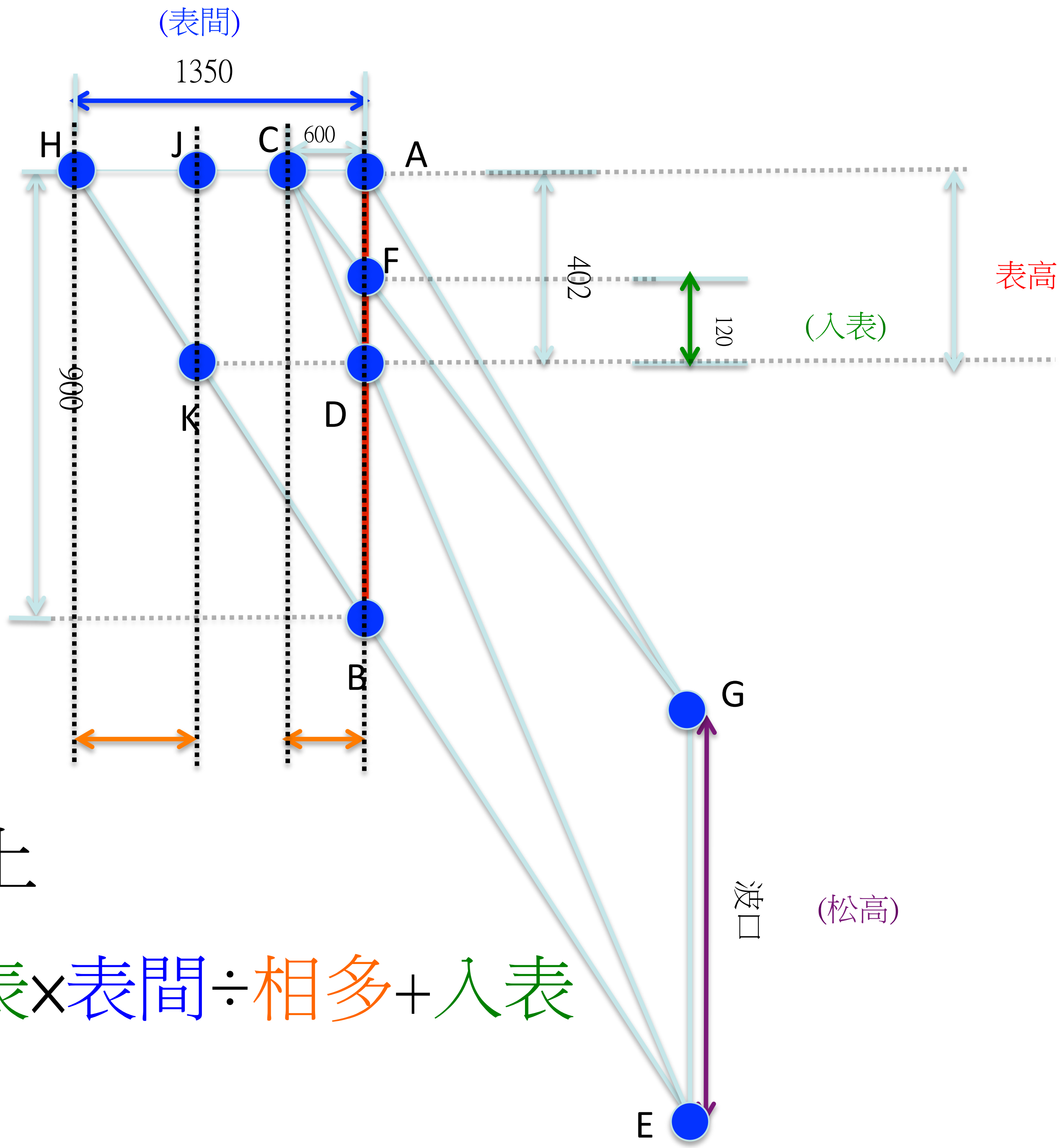
十三丈五尺
六丈
九丈
四丈二寸
一丈二尺
波口

$$\frac{JH}{JK} = \frac{AH}{AB}$$

$$JH = \frac{AH}{AB} JK$$

(相多) = JH - AC

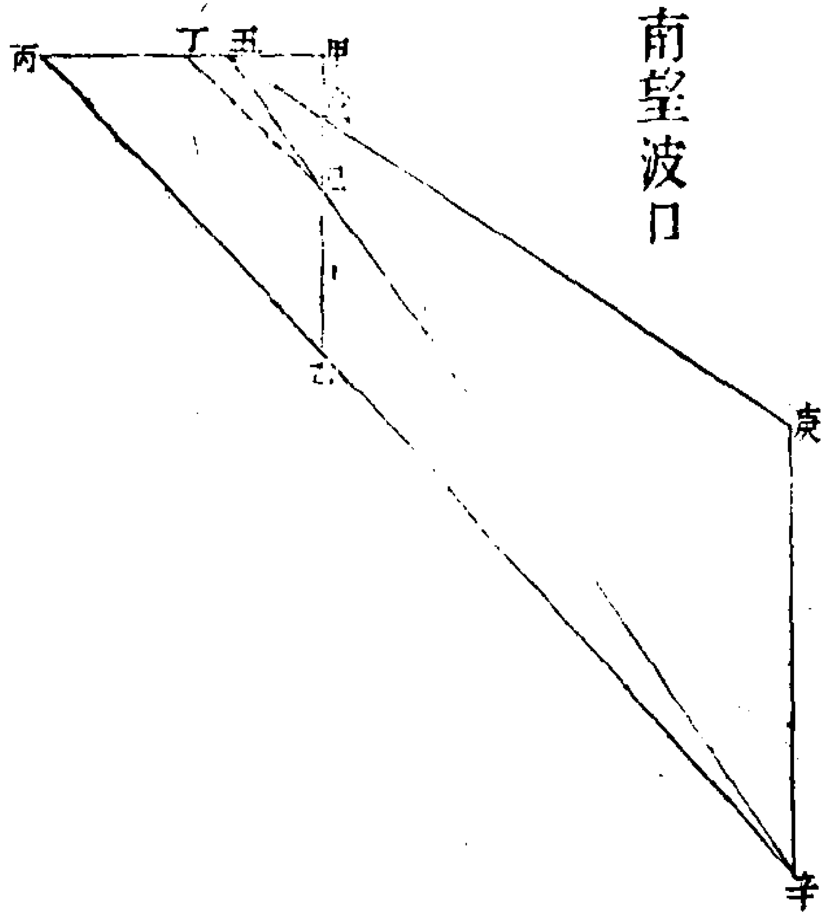
$$AJ = AH - JH$$



望松生山上

松高＝入表×表間÷相多+入表

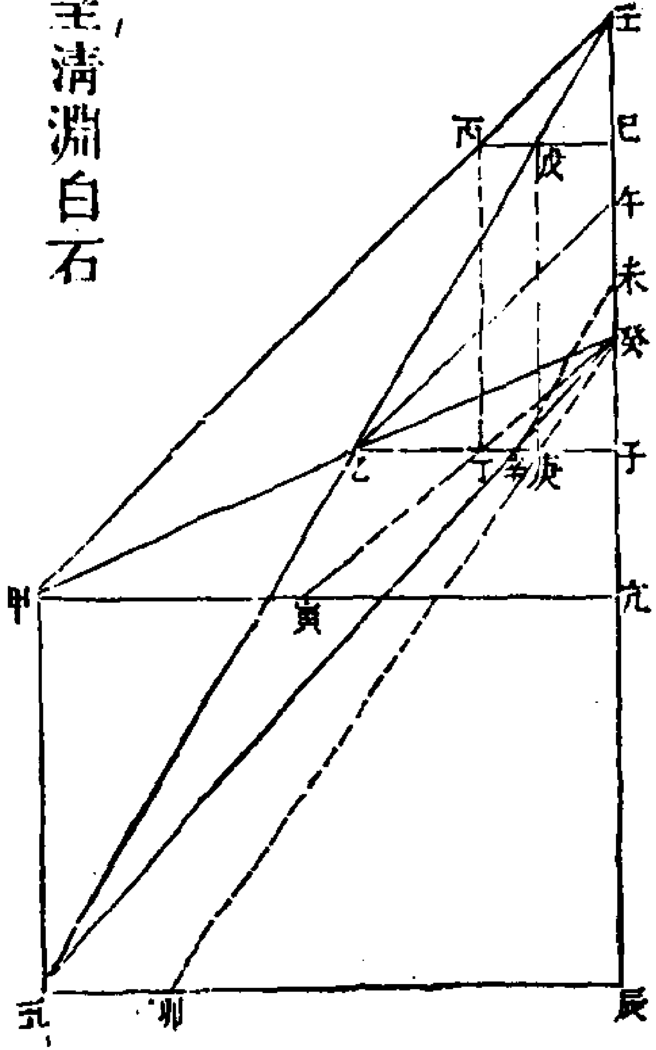
東南望波口



望清淵白石

- 今有望清淵，淵下有白石。偃矩岸上，令勾高三尺。斜望水岸，入下股四尺五寸。望白石，入下股二尺四寸。又設重矩於上，其間相去四尺。更從勾端斜望水岸，入上股四尺。以望白石，入上股二尺二寸。問水深幾何？
- 答曰：一丈二尺。
- 術曰：置望水上下股相減，餘以乘望石上股為上率。又以望石上下股相減，餘以乘望水上股為下率。兩率相減，餘以乘矩間為實；以二差相乘為法。實如法而一，得水深。
- 又術：列望水上下股及望石上下股，相減，餘并為法。以望石下股減望水下股，餘以乘矩間為實，實如法而一，得水深。

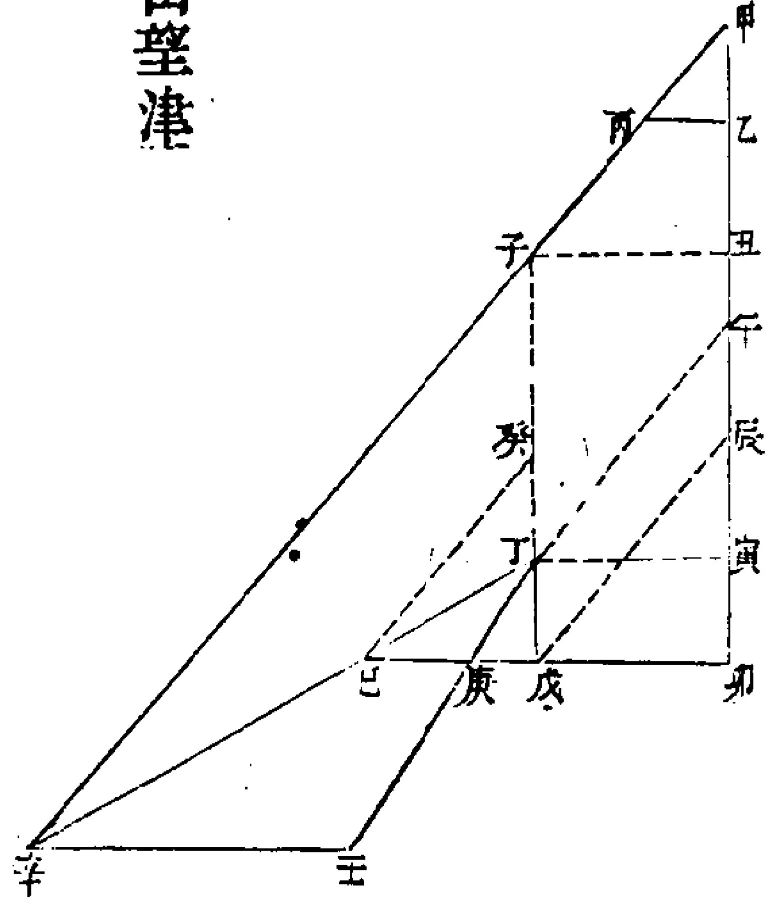
望清淵白石



登山望津

- 今有登山望津，津在山南。偃矩山上，令勾高一丈二尺。從勾端斜望津南岸，入下股二丈三尺一寸。又望津北岸，入前望股裏一丈八寸。更登高巖北，卻行二十二步，上登五十一步，偃矩山上。更從勾端斜望津南岸，入上股二丈二尺。問津廣幾何？ 答曰：二里一百二步。
- 術曰：以勾高乘下股，如上股而一。所得以勾高減之，餘為法；置北行，以勾高乘之，如上股而一。所得以減上登，餘以乘入股裏為實。實如法而一，即得津廣。

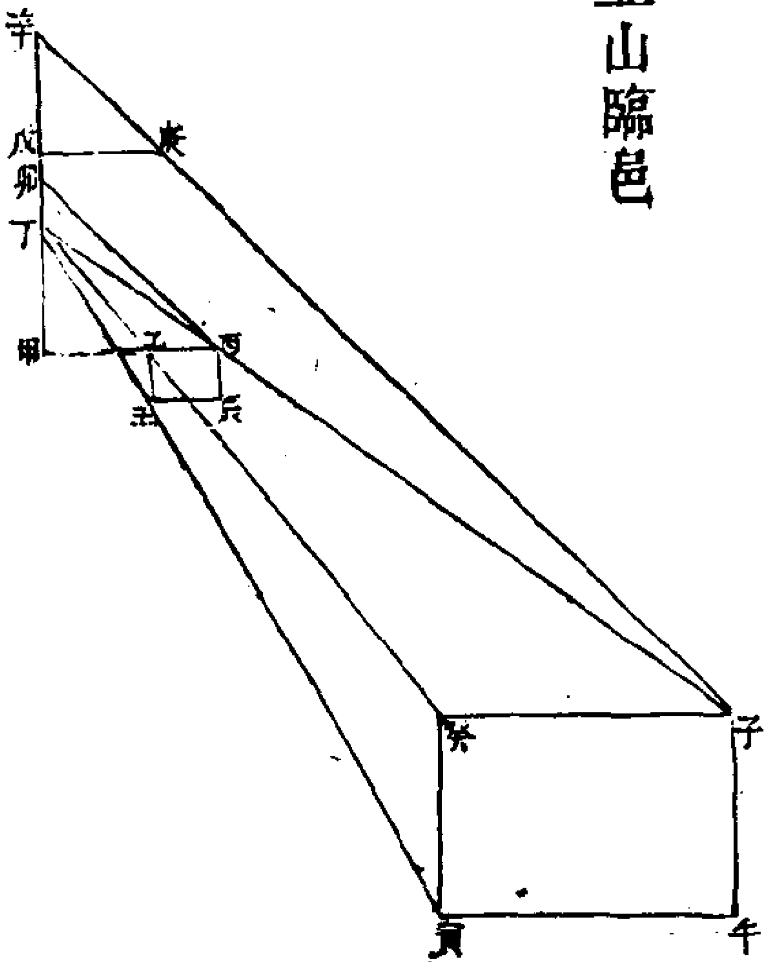
登山望津



登山臨邑

- 今有登山臨邑，邑在山南。偃矩山上，令勾高三尺五寸。令勾端與邑東南隅及東北隅參相直。從勾端遙望東北隅，入下股一丈二尺。又施橫勾於入股之會，從立勾端望西北隅，入橫勾五尺。望東南隅，入下股一丈八尺。又設重矩於上，令矩間相去四丈。更從立勾端望東南隅，入上股一丈七尺五寸。問邑廣長各幾何？
- 答曰：南北長一里一百步；東西廣一里三十三步、少半步。
- 術曰：以勾高乘東南隅入下股，如上股而一，所得減勾高，餘為法；以東北隅下股減東南隅下股，餘以乘矩間為實。實如法而一，得邑南北長也。求邑廣：以入橫勾乘矩間為實。實如法而一，即得邑東西廣。

登山臨邑



李潢

- 李潢，字雲門，鍾祥郢中新堤街人，生於清乾隆十一年（1746年）歲次丙寅，從小天資聰穎，讀書過目不忘。父李兆鈺，任江南省海州知州，因蝗害被劾落職，卒於蘇州。其時，李潢年齡尚小，扶父柩返歸故里。豪強為奪其財產誣陷李潢入獄，他在獄中仍不忘讀書，每當家人探視，他則囑其送書獄中，讀完再送，如此既久，學業益進。乾隆三十年（1765年），雲南李因培巡撫湖北，察知李潢案冤，李潢由此出獄。出獄的當年參加鄉試，取中第一名解元。乾隆三十六年（1771年）參加會試，取中貢生，接著參加殿試，取中二甲，賜進士出身。經朝考選為遮吉士，三年後留翰林院充編修，任四庫館纂修官。後逐級升任至內閣學士兼禮部侍郎，掌督山西、江西鄉試，視學浙江，遷任兵部右侍郎。清嘉慶元年（1796年）歲次丙辰，任京城會試副總裁。嘉慶二年（1797年）視學江西轉任兵部左侍郎。李潢身居朝廷命官後，曾衣錦還鄉，邑人要他與誣陷他下獄的人評理，他大人不計小人過，並不把此事放在心上。當時內閣大學士和珅請李潢授業其子，李潢推辭不應，在母親冷太夫人的勸說下，才勉強應允。嘉慶四年（1799年），和珅案發被嘉慶帝賜死，李潢受到株連而降為編修。李潢博學多才，精於算學、天文學和音律學，當時有"南齊北紀，不逮鍾祥一李"之說，"南齊"為清著名史學家正二品禮部右侍郎浙江天台人齊召南，"北紀"為清著名文學家從一品禮部尚書、協辦大學士河北獻縣人紀昀，"一李"為正二品兵部左侍郎湖北鍾祥人李潢。此說從一個側面說明李潢知識廣博，聲望崇高。李潢卒於清嘉慶十七年（1812年）歲次壬申，享年66歲，葬北京永定門外。其著述有《九章算術細草圖說》十卷、《海島算經細草圖說》一卷、《輯古算經考注》二卷。